

ÉTUDE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES  
SINGULIÈREMENT PERTURBÉES,  
AU VOISINAGE D'UN POINT TOURNANT



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Définitions, propriétés élémentaires</b>	<b>10</b>
1.1	Notion de relief . . . . .	10
1.2	Série formelle Gevrey . . . . .	12
1.3	Série formelle et vraie solution . . . . .	13
1.4	Points tournants d'une équation différentielle . . . . .	14
1.5	Phénomène de Stokes . . . . .	16
1.6	Solutions ncanardsž . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Les canards de Van der Pol</b>	<b>20</b>
2.1	Introduction . . . . .	20
2.2	Étude de la courbe lente . . . . .	25
2.3	Existence d'une solution de (E'), $Y(X, \varepsilon)$ , qui est voisine de $Y_0$ . .	28
2.4	Estimation de $\alpha^+ - \alpha^-$ . . . . .	35
2.4.1	Préliminaires . . . . .	35
2.4.2	Établissement de l'équation vérifiée par $\alpha^+ - \alpha^-$ . . . . .	38
2.4.3	Calcul de l'équivalent pour $b$ . . . . .	40
2.5	Conséquence sur les coefficients de la série $\hat{a}(\varepsilon)$ . . . . .	45
2.6	Résultats numériques . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Généralisation</b>	<b>50</b>
3.1	Préliminaires . . . . .	50
3.1.1	Rappel : estimation de Cauchy . . . . .	50
3.1.2	Forme normale pour une équation différentielle . . . . .	50
3.2	Existence de solutions d'une équation différentielle près d'un point tournant . . . . .	52
3.2.1	Existence d'une solution nloinž de 0 . . . . .	53
3.2.2	Au voisinage de 0 . . . . .	58
3.2.3	Développement de la solution intérieure . . . . .	68
3.2.4	Connexion des développements asymptotiques . . . . .	76
3.3	Existence de solutions bornées jusqu'en $x = 0$ . . . . .	82
3.3.1	Existence d'une solution formelle continue en 0 . . . . .	83
3.3.2	Existence de vraies solutions holomorphes jusqu'en 0 . . . .	85

3.3.3	Une estimation préliminaire . . . . .	89
3.3.4	Existence de solutions $y(x, \varepsilon)$ exceptionnelles qui restent bornées dans un voisinage de taille fixe du point 0 . . . . .	90
<b>4</b>	<b>L'équation du Brusselator</b>	<b>96</b>
4.1	Existence de solutions canards . . . . .	96
4.2	Estimation de $a^+ - a^-$ . . . . .	99
4.2.1	Quelques équivalents . . . . .	101
4.2.2	Coefficient de Stokes pour l'équation (4.2) . . . . .	102
4.2.3	L'équation différentielle pour l'estimation de $a^+ - a^-$ . . .	106
4.2.4	Calcul de l'équivalent . . . . .	106
4.3	Conséquence pour le développement en série de $a(\varepsilon)$ . . . . .	110

# Table des figures

1	Lignes de relief avec $R(x) = \Re \left( \int^x t dt \right)$ ; les signes $-$ et $+$ désignent respectivement les deux vallées et montagnes par rapport au point col 0. . . . .	15
2	Canard, dit île Van der Polz . . . . .	19
3	Cycle pour $\alpha = 0$ . . . . .	21
4	Canard intermédiaire ; B, d'abscisse $b$ , est appelé île du canard	22
5	Grand canard . . . . .	22
6	Chemin d'intégration $\gamma$ . . . . .	46
7	Relief pour l'équation de Van der Pol, et chemins pour l'intégration numérique . . . . .	49
8	Domaine $\mathcal{D}_C$ . . . . .	60
9	Exemple de voisinage de 0, avec représentation de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ ( $p = 4$ )	92
10	Courbe canard du Brusselator . . . . .	97
11	Relief correspondant à $\int_0^x 2t(1+t)dt$ : domaine accessible à partir des sommets Est ou Nord, pour $a = a^+$ ; les courbes passant par 0 sont les courbes de niveau $R(x) = 0$ , celles passant par $-1$ ont pour équation $R(x) = 1/3$ . . . . .	100
12	Domaine d'existence de $z^+$ pour différentes valeurs de $\theta = \arg(\varepsilon)$ .	111

## Introduction

Soit l'équation de Van der Pol forcée

$$\varepsilon \ddot{u} + (u^2 - 1)\dot{u} + u = \alpha,$$

où  $\varepsilon$  est un paramètre que l'on fait tendre vers 0, et où  $\dot{u}$  désigne la dérivée de  $u$  par rapport au temps  $t$ .

Cette équation est équivalente au système différentiel

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{u} &= y - \frac{u^3}{3} + u \\ \dot{y} &= \alpha - u \end{cases}$$

dont on a découvert il y a plus de vingt ans certaines solutions particulières, appelées grands canards : pour certaines valeurs de  $\alpha$ , dépendant de  $\varepsilon$ , ces solutions restent au voisinage de la courbe lente  $y = \frac{u^3}{3} - u$  (obtenue en posant  $\varepsilon = 0$ ) y compris le long de la partie instable de cette courbe, entre les deux sommets  $y = -1$  et  $y = 1$  (cf. chapitre 2). Des études avec les outils de l'analyse non standard, sur la droite réelle, ont permis de montrer que l'existence de canards est souvent inéluctable, mais qu'ils ont une durée de vie extrêmement courte : les valeurs du paramètre  $\alpha$  menant à des canards sont toutes dans un intervalle de taille  $\exp(-M/\varepsilon)$  (quand  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , et pour un certain  $M > 0$ ).

Ce système étant lui-même équivalent à l'équation

$$\varepsilon v \frac{dv}{du} = (1 - u^2)v + \alpha - u, \tag{E}$$

l'étude de ces solutions canards a pu progresser par le passage d'une variable  $u$  réelle à une variable dans le champ complexe [7]. La simplification de l'étude vient essentiellement du fait que les fonctions solutions, au lieu de n'être que de classe  $\mathcal{C}^1$ , sont alors toutes holomorphes. Par ailleurs, le lien avec les points tournants apparaît alors clairement.

On constate d'abord que cette équation admet une solution formelle

$$\hat{v}(u, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(u) \varepsilon^n, \quad \hat{\alpha}(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n,$$

dont la propriété (exceptionnelle) est que tous les termes  $v_n(u)$  sont analytiques en  $u = 1$ . Ensuite, on peut chercher à faire le lien entre cette solution formelle et des solutions holomorphes, bornées en  $u = 1$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0. Si on impose des domaines d'existence les plus grands possibles, on trouve exactement deux solutions  $v^+(u, \varepsilon)$  et  $v^-(u, \varepsilon)$  pour leurs paramètres respectifs  $\alpha^+(\varepsilon)$  et  $\alpha^-(\varepsilon)$ . Avec ces solutions qui sont définies toutes deux sur le segment  $u \in [-1 + \rho, 1]$ , pour tout  $\rho > 0$  fixé, on est capable de donner une valeur à  $M$  ; on pourra choisir

$$M = R(-1 + \rho) - R(1) = \Re \left( \int_1^{-1+\rho} (t-1)(t+1)^2 dt \right).$$

Outre le premier point tournant  $u = 1$ , on voit ici que l'autre point tournant  $u = -1$  joue aussi un rôle important. Et qu'il pourrait être intéressant de s'approcher de ce second point, pour remplacer  $-1 + \rho$  par  $u_1 = -1 + o_\varepsilon(1)$ ,  $u_1 > -1$ . D'où l'idée d'étudier le voisinage des points tournants, pour montrer qu'on peut toujours contrôler la croissance, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , des solutions  $v^+$  et  $v^-$  jusqu'en un tel point  $u_1$ .

Considérons le cas général d'une équation différentielle du premier ordre non linéaire

$$\varepsilon y' = y f(x, \varepsilon) + h(x, \varepsilon) + \varepsilon y^2 P(x, \varepsilon, y),$$

où  $\varepsilon$  est un petit paramètre complexe, où  $y'$  désigne la dérivée  $\frac{dy}{dx}$ , et où les fonctions  $f$ ,  $h$  et  $P$  sont holomorphes en  $x$  et  $y$  dans certains domaines et admettent un développement en série (éventuellement non convergent) en  $\varepsilon$ .

On peut calculer une solution formelle du type

$$\hat{y}(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \varepsilon^n$$

pour cette équation, à l'aide d'une récurrence sur les coefficients  $y_n(x)$ . On peut ensuite au moins espérer [14] que cette série en  $\varepsilon$ , le plus souvent divergente, corresponde à une solution holomorphe  $y(x, \varepsilon)$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0 dans des secteurs  $\arg \varepsilon \in ]\theta_1, \theta_2[$ . On sait d'ailleurs qu'on a effectivement une solution, sur un voisinage de tout point  $x$  tels que  $f(x, 0) \neq 0$ , qui reste bornée quand  $\varepsilon$  tend vers 0 [12].

En revanche, les points  $x_0$  tels que  $f(x_0, 0) = 0$  font partie le plus souvent [15] des points tournants pour cette équation : on voit bien que les coefficients  $y_n$  calculés sont alors en général singuliers en  $x = x_0$ . Il paraît alors difficile que la solution formelle  $\hat{y}$  puisse être le développement asymptotique d'une solution holomorphe dans tout un voisinage de  $x_0$  (la non-existence d'une telle solution est précisément la définition d'un point tournant). Cependant, dans certains cas particuliers, il existe tout de même une série formelle dont tous les termes sont

analytiques en  $x_0$  ; ce genre de résultat est obtenu par exemple en introduisant un (multi-)paramètre sous la forme d'une série formelle. Si une telle série formelle existe, cela permet d'envisager l'existence d'une solution à l'équation différentielle, qui reste analytique en  $x_0$ . Ces solutions particulières, holomorphes en un point généralement tournant pour les solutions d'une équation différentielle donnée, sont celles qu'on a appelées, par généralisation, solutions canards holomorphes, ou solutions surstables. L'existence de ces canards dépend souvent du choix d'un (multi-)paramètre  $\alpha(\varepsilon)$ , présent dans les fonctions  $f$ ,  $h$  et/ou  $P$ , qui s'écrit lui aussi, bien sûr, au moins comme une série formelle en  $\varepsilon$ .

On a ainsi pu démontrer [2] dans un cas très général que les valeurs du paramètre  $a$  donnant des canards sont exponentiellement proches en  $\varepsilon$ , et qu'on peut trouver un bon majorant de la constante  $M$  généralisée de la manière suivante : si  $\alpha^+(\varepsilon)$  et  $\alpha^-(\varepsilon)$  sont deux valeurs à canards,

$$\|\alpha^+ - \alpha^-\| < C \exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right), \text{ pour tout } \varepsilon > 0 \text{ assez petit,}$$

et pour un certain  $C$  assez grand dépendant de la valeur de  $M$  choisie ; comme dans le cas de l'équation de Van der Pol,  $M$  peut s'écrire  $M = R(x_1) - R(x_0)$ , où  $R$  désigne l'application  $R(x) = \Re\left(\int_0^x f(t, 0)dt\right)$  ;  $x_1$  est à nouveau un point dans le domaine d'existence  $\mathcal{D}$  de plusieurs solutions canards «maximales», point qu'on a intérêt à prendre le plus proche possible d'un autre point tournant de l'équation pour obtenir la meilleure inégalité.

L'idée des recherches entreprises ici a donc été d'étudier les solutions au voisinage des points tournants pour voir si cela ne permettait pas de s'approcher de ces points (i.e. de prendre un  $x_1$  qui tend vers une singularité quand  $\varepsilon$  tend vers 0), et donc de préciser l'inégalité ci-dessus. L'intérêt principal d'un tel résultat étant qu'il permet ensuite de donner une estimation ou au moins une bonne majoration des coefficients des séries formelles correspondant à  $\alpha$ .

Dans le cas de l'équation de Van der Pol, au chapitre 2, on montrera que les solutions canards  $v^+$  et  $v^-$  existent effectivement dans des domaines contenant le segment  $[-1 + X_l \varepsilon^{1/3}, 1]$  (au lieu de  $[-1 + \rho, 1]$  pour tout  $\rho$  strictement positif), ceci pour une constante  $X_l$  suffisamment grande, mais qui peut être choisie indépendante de  $\varepsilon$  ; la démonstration utilisera une équation intérieure équivalente à (E), mais non singulièrement perturbée. La propriété démontrée permet ensuite effectivement de donner un équivalent pour les coefficients  $a_n$  des paramètres  $\alpha$  à canards :

$$a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{-2\sqrt{6}}{\pi\sqrt{\pi}e^{4/3}} n^{-1/2} \left(\frac{3}{4}\right)^n n!$$

Le résultat de l'étude des solutions au voisinage des points tournants sera généralisé et complété au § 3.2.2 pour une équation générale que l'on réécrit sous



la forme

$$\varepsilon y' = (x^p f(x) + \varepsilon g(x, \varepsilon, \alpha))y + h(x, \varepsilon, \alpha) + \varepsilon y^2 P(x, \varepsilon, \alpha, \varepsilon y),$$

dont on étudie le point tournant 0 (pour  $p > 0$ ).

Cette équation singulièrement perturbée admet une solution (dite : extérieure) à distance finie du point tournant à l'intérieur de certains secteurs centrés en ce point tournant ; la démonstration de l'existence de cette fonction est rappelée au paragraphe § 3.2.1. Cette première équation est équivalente à une équation intérieure ; celle-ci, si elle est régulière en  $\varepsilon$ , possède au moins une solution particulière, qui peut être connectée avec la solution extérieure. Le domaine en  $x$  de toute solution holomorphe bornée en  $\varepsilon$  de l'équation de départ peut donc être étendu jusqu'à une distance  $X_l \varepsilon^{1/(p+1)}$  des points tournants :

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{C} / |x| > X_l \varepsilon^{1/(p+1)} \text{ et } \arg(x) \in ]\theta_1, \theta_2[ \} , \text{ pour des } X_l \text{ assez grands.}$$

Dans ce nouveau domaine, cette solution n'est pas nécessairement bornée quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , mais sa croissance reste cependant contrôlée et ne devient pas exponentielle.

Au § 3.3, à l'aide de ce résultat, on démontre l'existence, dans certains cas, de solutions surstables dans un voisinage complet d'un point tournant, si on choisit correctement le (p-multi-)paramètre  $\alpha$  en fonction de  $\varepsilon$ .

Au chapitre 4, on s'intéresse alors à l'équation du Brusselator, transformée en l'équation différentielle suivante, avec  $a$  pour paramètre,

$$\varepsilon z(x) \frac{dz(x)}{dx} = \frac{2x}{(1+x)^2} \left( z - \frac{1}{2(1+x)^3} \right) - \frac{a-1}{(1+x)^2} z - z \left( z - \frac{1}{2(1+x)^3} \right) \frac{2\varepsilon}{1+x}.$$

Le système du Brusselator équivalent est connu pour avoir des solutions canards pour certaines valeurs d'un paramètre, mais l'étude du domaine de ces solutions dans le plan complexe n'avait pas encore été faite. Grâce à la généralisation du chapitre précédent, il devient facile de redémontrer l'existence des canards holomorphes et de décrire leur domaine d'existence étendu. Comme pour le cas de l'équation de Van der Pol, on peut ensuite trouver un équivalent (quand  $n \rightarrow \infty$ ) pour les coefficients des paramètres à canards.

À noter que, pour l'équation du Brusselator comme pour l'équation de Van der Pol, il faut commencer par réussir à calculer des coefficients de Stokes pour une équation différentielle non linéaire avant de pouvoir donner les équivalents cités. Les multiplicateurs de Stokes, qui apparaissent autour d'un point tournant ne sont pas exactement calculables dans le cas non linéaire, mais dans les deux exemples cités, on réussit à en déterminer un équivalent complet.

# Chapitre 1

## Définitions, propriétés élémentaires

### 1.1 Notion de relief

Dans tout ce qui suit, il sera souvent fait mention de *relief* et de chemins descendants ce relief, notions introduites par J. Callot [3] voici quelques années.

Pour faire comprendre son intérêt, regardons l'équation différentielle singulièrement perturbée (c'est-à-dire avec  $\varepsilon$  qui tend vers 0) linéarisée générale

$$\varepsilon y' = yf(x, \varepsilon) + h(x, \varepsilon) + \varepsilon y^2 P(x, \varepsilon, y), \quad (\text{E.diff.})$$

où toutes les fonctions considérées sont holomorphes dans certains domaines en toutes leurs variables. On souhaite montrer que cette équation admet une solution holomorphe en ses deux variables  $y(x, \varepsilon)$ . Si une telle solution existe, en utilisant la formule de variation de la constante, on voit que nécessairement  $y$  vérifie l'égalité suivante, dans laquelle  $\gamma_x^s$  désigne un chemin différentiable de  $\mathbb{C}$  allant de  $s$  à  $x$  :

$$y(x, \varepsilon) = y(s, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma_x^s} e^{\frac{F(x, \varepsilon) - F(t, \varepsilon)}{\varepsilon}} \left( h(t, \varepsilon) + \varepsilon y^2 P(t, \varepsilon, y) \right) dt,$$

où  $F(x, \varepsilon) = \int^x f(t, \varepsilon) dt$ . Dans tous les cas envisagés ci-après, on supposera que  $F(x, \varepsilon)$  est peu différent de  $F(x, 0)$  : on aura au pire  $F(x, \varepsilon) - F(x, 0) = \mathcal{O}(\varepsilon)$  (ce sera bien sûr le cas si  $f$  est holomorphe en  $\varepsilon = 0$ ).

Pour voir s'il existe une solution  $y$  bornée quand  $\varepsilon$  tend vers 0, on s'intéresse particulièrement au terme exponentiel. Pour  $\varepsilon$  réel positif, on voit bien intuitivement que si la partie réelle de  $F(x, \varepsilon) - F(t, \varepsilon)$  est positive pour un certain  $t$ , l'intégrale est en général exponentiellement grande quand  $\varepsilon$  tend vers 0. C'est à cause de cela que l'on considère l'application relief qui à tout  $x$  de  $\mathbb{C}$  associe  $R(x, \varepsilon) = \Re(F(x, \varepsilon))$  dans  $\mathbb{R}$ , dont les lignes de niveau ont pour équation  $\Re(F(x, \varepsilon)) = \text{constante}$ . Il paraît alors naturel de supposer l'existence de solutions dans des domaines  $\{x / \exists \gamma_x^s, \text{ chemin descendant le relief en chacun de ses points}\}$ . En fait, on en demande un peu plus :

**Définition 1** On dira d'un domaine  $\mathcal{D}$  qu'il est **accessible** si :

1. pour tout  $x \in \mathcal{D}$  on peut trouver un chemin différentiable  $\gamma_x(u)$  allant d'un point fixe  $s \in \mathcal{D}$  (appelé sommet de  $\mathcal{D}$ ) à  $x$  ;
2.  $\gamma_x$  est tel que  $\frac{dR(\gamma_x(u))}{du} \leq -C_{\gamma_x} |F'(\gamma_x(u))\gamma'_x(u)|$  pour tout  $u$  ;
3. les  $C_{\gamma_x}$ , tous positifs, admettent une borne inférieure strictement positive :  $\inf_{x \in \mathcal{D}} C_{\gamma_x}$  existe et est égal à  $C > 0$ .

Si on a une telle propriété, le terme exponentiel de l'intégrale sera exponentiellement petit quand  $\varepsilon$  tend vers 0, et il est alors raisonnable d'espérer pouvoir contrôler la valeur de l'intégrale pour tous les  $x \in \mathcal{D}$ .

Si  $\varepsilon$  tend vers 0 dans une autre direction ( $\arg(\varepsilon) = \theta \neq 0$ ), on change de relief, et donc de domaine accessible, en optant cette fois pour  $\Re \frac{F(x, \varepsilon) - F(t, \varepsilon)}{e^{i\theta}}$ , la condition d'accessibilité restant la même avec le nouveau relief. On préfère en général effectuer les études avec un relief fixe (qui donne des chemins  $\gamma_x$  fixe) ; c'est la raison pour laquelle on travaillera toujours avec  $\arg(\varepsilon)$  constant et  $|\varepsilon| \rightarrow 0$ .

Pour l'intégration numérique aussi, la propriété de relief est importante : il n'est pas difficile de vérifier que pour deux solutions de l'équation différentielle  $y_a$  et  $y_b$  telles que  $y_a(x_0) \neq y_b(x_0)$ , la différence entre les deux fonctions se comportera de manière totalement différente (pour  $\varepsilon$  arbitrairement petit) suivant qu'on part de  $x_0$  le long d'un chemin qui monte, ou qui descend du relief. En effet, on aura

$$(y_a - y_b)(x, \varepsilon) = (y_a - y_b)(x_0, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma_{x_0}}^{x_0} e^{\frac{F(x, \varepsilon) - F(t, \varepsilon)}{\varepsilon}} (\varepsilon dP(t, \varepsilon, y_a, y_b)) dt.$$

L'intégrale dans cette égalité sera, si  $\gamma_x$  descend le relief, exponentiellement petite en  $\varepsilon$  ; ce qui signifie que les deux solutions resteront voisines (du moins si le chemin entre  $x_0$  et  $x$  est de longueur finie). Mais l'intégrale deviendra exponentiellement grande si ce chemin monte le relief ; et donc dans ce cas  $y_a$  et  $y_b$  s'éloigneront très rapidement l'une de l'autre.

Lors d'une intégration numérique d'une équation différentielle du type cité, en prenant un petit  $\varepsilon$ , il sera donc très important de partir d'un sommet  $x_0$ , « haut » sur le relief, et d'en rester aux points accessibles à partir de ce point.

Cette constatation nous amène à deux nouvelles définitions :

**Définition 2** On appellera **montagne**, pour le relief  $R(x)$ , par rapport au point  $x_0 \in \mathbb{C}$  (dans les cas cités,  $x_0$  sera un point col pour le relief  $R$ ), un domaine de  $\mathbb{C}$  connexe et simplement connexe tel que  $x_0$  est accessible avec ce relief à partir de tout élément du domaine :  $R(x) > R(x_0)$ .

De même, on appellera **vallée** un domaine, toujours simplement connexe, accessible à partir de  $x_0$  ; les points  $x$  du domaine vérifient donc :  $R(x) < R(x_0)$ .

## 1.2 Série formelle Gevrey

Quand on essaye de donner une solution sous forme de série à une équation différentielle singulièrement perturbée, on arrive à des séries divergentes, mais dont les termes vérifient cependant des propriétés de croissance. On est amené naturellement à introduire les séries Gevrey (cf. [14],[15]).

**Définition 3** *On notera dans toute la suite le **secteur** ouvert centré en  $x_0$ , de rayon  $\rho$  et d'angle  $]\theta_1, \theta_2[$  sous la forme*

$$S(x_0, \rho, \theta_1, \theta_2), \text{ soit } \left\{ x \in \mathbb{C} \middle/ 0 < |x - x_0| < \rho, \text{ et } \arg(x - x_0) \in ]\theta_1, \theta_2[ \right\}$$

*Si le rayon  $\rho$  n'est pas précisé, il sera supposé infini.*

Par extension, on parlera aussi de secteurs centrés en l'infini :

$$S(\infty, \varrho, \theta_1, \theta_2) = \left\{ x \in \mathbb{C} \middle/ |x| > \varrho, \text{ et } \arg(x) \in ]\theta_1, \theta_2[ \right\}$$

**Définition 4** *On dit d'une série formelle*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n$$

*qu'elle est **Gevrey** d'ordre 1 si la série a un rayon de convergence nul, mais qu'il existe des constantes positives A et B telles que, pour tout n*

$$|a_n| \leq AB^n n!$$

Cette définition s'étend bien sûr aux séries de fonctions

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \varepsilon^n,$$

en remplaçant  $|a_n|$  par  $\|y_n(x)\|$  où  $\|\cdot\|$  désigne la norme que l'on choisit pour les fonctions  $y_n$ .

**Définition 5** *On dit qu'une fonction  $a(\varepsilon)$  admet la série  $\sum a_n \varepsilon^n$  comme **développement asymptotique Gevrey** dans un certain secteur  $S = S(0, \rho, \theta_1, \theta_2)$  si  $a(\varepsilon)$  est holomorphe sur  $S$  et s'il existe A et B, constantes positives, telles que :*

$$\text{pour tout } N \text{ assez grand et tout } \varepsilon \text{ dans } S, \left| a(\varepsilon) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \varepsilon^n \right| < AB^N N! |\varepsilon|^N.$$

*Dans le cas d'une série de fonctions (de la forme ci-dessus), si la majoration est indépendante de  $x$ , pour tout  $x$  dans un certain domaine  $\mathcal{D}$ , on parle de série asymptotique **uniforme** sur  $\mathcal{D}$ .*

On sait qu'il existe une infinité de fonctions holomorphes  $a(\varepsilon)$  admettant  $\sum a_n \varepsilon^n$  comme développement asymptotique en 0 (on écrit  $a \sim \sum a_n \varepsilon^n$ ).

Si  $a \sim \sum a_n \varepsilon^n$ , on sait par ailleurs qu'on obtient une approximation exponentiellement bonne en  $\varepsilon$  de la valeur de  $a(\varepsilon)$  en sommant la série des  $a_n \varepsilon^n$  jusqu'à ce que, à  $\varepsilon$  fixé, le terme  $|a_n \varepsilon^n|$  soit minimum (on parle alors de sommation « au plus petit terme »).

### 1.3 Série formelle et vraie solution

On se place dans le cas où une équation différentielle (singulièrement perturbée) du type (E.diff.)

$$\varepsilon y' = yf(x, \varepsilon) + h(x, \varepsilon) + \varepsilon y^2 P(x, \varepsilon, y)$$

admet une solution formelle

$$\hat{y}(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \varepsilon^n.$$

**Définition 6** Si la série  $\sum y_n(x) \varepsilon^n$  est solution formelle de (E.diff.), on appelle classiquement **ncourbe lentez** la fonction  $y_0(x)$ , obtenue pour la valeur du paramètre  $\varepsilon = 0$ .

Le problème est de montrer qu'il existe une solution holomorphe  $y(x, \varepsilon)$  (existant dans certains secteurs centrés en 0 pour la variable  $\varepsilon$ , et dans certains domaines pour la variable  $x$ ), qui admette effectivement  $\hat{y}$  comme développement asymptotique quand  $\varepsilon$  tend vers 0.

La réponse générale est loin d'être évidente. Un certain nombre d'articles ([9], [6]) ont été récemment publiés à ce sujet, partant de l'équation de croissance cristalline

$$\varepsilon^2 \Phi''' + \Phi' = \cos \Phi$$

avec les valeurs aux bornes

$$\Phi(s) \rightarrow -\pi/2 \text{ quand } s \rightarrow -\infty, \quad \Phi(s) \rightarrow \pi/2 \text{ quand } s \rightarrow +\infty.$$

Ils démontrent que s'il existe bien une solution formelle  $\hat{\Phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} \Phi_n(s)$ , où  $\Phi_0$  vérifie bien les valeurs aux bornes et  $\lim_{\infty} \Phi_n = 0$  pour tout  $n$ , il n'existe pas de solution holomorphe à l'équation vérifiant les limites voulues en l'infini (le problème venant d'un terme exponentiellement petit en  $\varepsilon$ , qui n'apparaît donc pas dans la série). Ils donnent aussi des ébauches de procédures pour déterminer, pour des équations plus générales, si on est en présence de tels cas.

Le travail principal dans cette thèse correspond au problème inverse de celui envisagé pour l'équation de croissance cristalline. Sachant qu'on a une solution

formelle d'une équation différentielle qui vérifie une certaine propriété (dans notre cas, la continuité en un point qui est en général singulier), il s'agit de montrer qu'il existe effectivement une vraie solution à l'équation admettant cette série formelle comme développement asymptotique. Cette solution vérifie alors la même propriété (la continuité en ce point, ou plus exactement le fait que cette fonction reste bornée au voisinage de ce point quand  $\varepsilon$  tend vers 0).

Même pour ce problème particulier, on connaît des exemples où l'existence de solutions formelles à fonctions coefficients continues en  $x = 0$  n'implique pas l'existence de vraies solutions bornées, quand  $\varepsilon$  tend vers 0, au voisinage de  $x = 0$ . En effet, pour l'équation

$$\varepsilon u' = xu + \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon}}\right),$$

la solution nulle est solution formelle de l'équation, qui est évidemment analytique en 0. Cependant, les vraies solutions s'écrivent (en utilisant la formule de variation de la constante, qui met à nouveau le relief en évidence, fig. 1)

$$u(x) = u(x_0) \exp\left(\frac{x^2 - x_0^2}{2\varepsilon}\right) + \int_{x_0}^x \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \exp\left(\frac{x^2 - t^2}{2\varepsilon}\right) dt$$

ne peuvent pas être bornées en  $x$ , indépendamment de  $\varepsilon$ , dans un intervalle ouvert autour de  $x = 0$ . Ceci étant vrai quel que soit les  $x_0$  et  $u(x_0)$  choisis : pour  $x_0 > 0$ , la solution sera bornée en  $\varepsilon$  pour tout  $x \geq 0$ , mais ne le sera pas pour un  $x < 0$  quelconque fixé. On remarquera cependant que, dans cet exemple, les coefficients de l'équation ne sont pas tous holomorphes en  $\varepsilon$ .

## 1.4 Points tournants d'une équation différentielle

On trouve diverses définitions des points tournants pour une équation différentielle dans la littérature. La plus classique [14] pour une équation du type (E.diff.) est la définition npar défautz suivante :

**Définition 7**  *$x_0$  est appelé point tournant, pour une équation (E.diff.) admettant une solution formelle  $\hat{y} = \sum y_n \varepsilon^n$ , s'il n'existe pas de vraie solution de l'équation admettant comme développement asymptotique la série formelle  $\hat{y}$ , uniformément pour tout  $x$  dans un voisinage de  $x_0$  (quand  $\varepsilon$  tend vers 0).*

On remarquera que les points tournants sont bien des points du plan complexe en  $x$  : les séries formelles  $\hat{y}$ , sauf si elles convergent, ne sont des développements asymptotiques de solutions de l'équation que pour des  $\varepsilon$  tendant vers 0 dans certains secteurs en  $\varepsilon$  centrés en 0.

D'après ce qui a été dit à propos du relief, on constate que les seuls points susceptibles d'être des points tournants sont les points cols du relief donné par

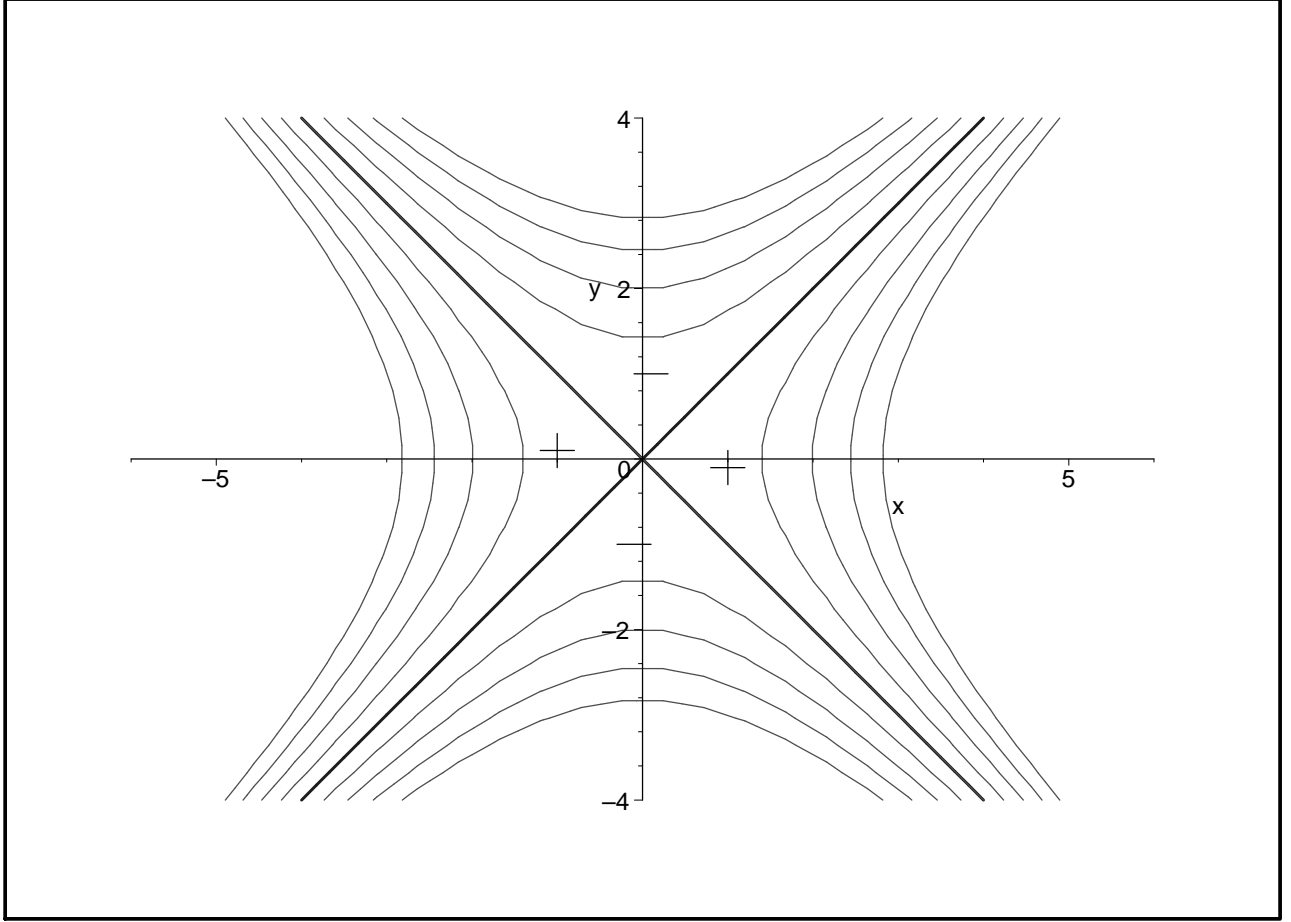


FIG. 1: Lignes de relief avec  $R(x) = \Re \left( \int^x t dt \right)$  ; les signes  $-$  et  $+$  désignent respectivement les deux vallées et montagnes par rapport au point col 0.

$\Re \left( \int^x f(t) dt \right)$ , autrement dit là où  $f$  s'annule. Ce qui est le cas dans l'exemple précédent (fig. 1). Ou bien évidemment des points singuliers de ce même relief. On peut voir en effet que pour un point normal  $x$ , il existe toujours un point naïu-dessus de  $x$  à partir duquel un voisinage complet de  $x$  est accessible ; et il existe donc une solution bornée dans ce voisinage. En revanche, pour un point  $x_0$  qui est un point col, ou singulier, le développement asymptotique sera valable en général au mieux sur une montagne naissant en  $x_0$  et l'essentiel du domaine accessible à partir du sommet de cette montagne. Pas forcément tout le domaine accessible, car la validité du développement jusqu'en  $x_0$  lui même ne soit pas forcément assurée. Dans ce qui suit, nous étudierons comment se comportent les solutions d'une équation différentielle au voisinage des points col pour le relief correspondant. Nous verrons que certains de ces points ne seront pas, exceptionnellement, des points tournants suivant la définition donnée ci-dessus.

## 1.5 Phénomène de Stokes

Autour d'un point tournant, correspondant à une solution formelle unique, on trouve en général différentes solutions existant dans des (sous-ensemble de) secteurs ouverts centrés en ce point ; on retrouvera cette propriété classique au théorème 10. Ces domaines d'existence sont tous différents, mais l'intersection de deux de ces domaines distincts n'est pas forcément vide. L'explication de cette différence de comportement de deux solutions, très voisines pour certains  $x$ , quand on s'approche des limites d'un domaine (l'une des solutions reste bornée, alors que l'autre  $y$  devient singulière) est le phénomène de Stokes.

Dans le cas linéaire, où les domaines d'existence sont exactement des secteurs ouverts, on sait [14] que la différence entre deux solutions est un terme du genre  $\exp(-P(x)/\varepsilon)$ . Ce terme est exponentiellement petit en  $\varepsilon$  dans l'intersection des domaines d'existence (ce qui explique que le développement asymptotique reste le même), mais il devient exponentiellement grand quand  $x$  atteint les limites des secteurs : pour  $\varepsilon > 0$ , quand la partie réelle de  $P(x)$  devient négative.

Dans le cas non linéaire, le phénomène est certes plus complexe, mais reste analogue. Quand on parlera ici de calculer un coefficient de Stokes, il s'agira de déterminer la différence de deux solutions à une équation donnée, au moins pour certains  $x$  où ces deux solutions sont toutes deux définies. Cependant alors que dans le cas linéaire, on peut trouver le terme exact, on n'aura dans le cas général qu'un équivalent (dans le meilleur des cas).

Le phénomène de Stokes est indissociable des points tournants : s'il n'est pas présent, c'est qu'il existe une solution holomorphe univalente tout autour du point tournant, correspondant à une unique série formelle. Dans ce cas, si la série formelle est bien définie en ce point, la solution est holomorphe jusque là. On n'a plus alors de point tournant, par définition.

## 1.6 Solutions *îcanards*

C'est dans ce cas particulier où il existe une solution holomorphe jusqu'en un point col du relief, qui est un *îcandidat* point tournant, que l'on parlera de solution canard :

**Définition 8** *La (vraie) solution d'une équation différentielle du type (E.diff.)*

$$\varepsilon y' = yf(x, \varepsilon) + h(x, \varepsilon) + \varepsilon y^2 P(x, \varepsilon, y),$$

*dont le relief correspondant  $\Re\left(\int^x f(t, \varepsilon) dt\right)$  admet un point col est appelée solution canard si ce point col n'est pas un point tournant pour elle.*

On considérera, dans la suite, uniquement les canards dans des domaines ouverts du plan complexe. Ils seront bien entendu holomorphes dans ces domaines.



Sur la droite réelle, il est en revanche possible de trouver des canards moins réguliers, dont seules les premières dérivées restent bornées dans un intervalle autour du point col.

L'existence de solutions canards a déjà été démontrée dans des cas très généraux. Parmi les résultats récents, on peut citer les deux théorèmes suivants :

**Théorème 1** [8] *Soit l'équation*

$$\varepsilon u' = f(x)u + \varepsilon P(x, u, \varepsilon)$$

*où les fonctions  $f$  et  $P$  vérifient les propriétés suivantes :*

1. *La fonction  $f$  est analytique dans un voisinage complexe d'un intervalle réel  $[a, b]$  autour de 0, et est à valeurs réelles sur cet intervalle.*
2. *On a  $xf(x) > 0$  pour tout  $x$  réel non nul de ce voisinage ; de plus, il existe  $\lambda > 0$  et  $p$  entier impair tels que  $f(x) = \lambda x^p (1 + \mathcal{O}(x))$  au voisinage de 0.*
3. *Le fonction  $P$  est analytique dans un voisinage de  $[a, b] \times \{0\} \times \{0\}$  dans  $\mathbb{C}^3$ .*

*Alors on a l'équivalence suivante : il existe une solution formelle  $\hat{u} = \sum u_n(x)\varepsilon^n$  dont tous les coefficients  $u_n$  sont analytiques au voisinage de 0 si et seulement si il existe une solution canard, tendant vers  $u_0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , uniformément dans un voisinage complexe de  $x = 0$ .*

Ce premier théorème montre que dans le cas des solutions canards, il y a en fait une relation presque automatique entre l'existence d'une solution formelle et l'existence d'une vraie solution. Le cas des équations avec paramètre est un peu différent, puisqu'on ne trouve, formellement, un paramètre que sous la forme d'une série formelle. Dans le cas de ces équations, on connaît le résultat suivant :

**Théorème 2** [2] *On considère l'équation avec le multiparamètre  $a$  suivante, définie pour  $x$  dans un domaine  $\mathcal{D}$  :*

$$\varepsilon u' = \Psi(x, u, a, \varepsilon),$$

*où  $\Psi$  est une fonction analytique dans un ouvert connexe  $D_\Psi$  de  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}$ . On suppose que*

1. *Il existe  $a_0 \in \mathbb{C}^p$  et une fonction analytique  $u_0$  tels que  $\Psi(x, u_0(x), a_0, 0) = 0$  pour tout  $x \in \mathcal{D}$  (il faut bien sûr que si  $x \in \mathcal{D}$ ,  $(x, u_0(x), a_0, 0)$  soit dans  $D_\Psi$ ).*
2. *La fonction  $f(x) = \frac{\partial \Psi}{\partial u}(x, u_0(x), a_0, 0)$  admet un unique zéro,  $x_0$  dans  $\mathcal{D}$ , qui est d'ordre  $p$ . Cette fonction  $f$  est celle donnant le relief pour l'équation, avec la relation  $R(x) = \Re \left( \int^x f(t) dt \right)$  ;  $x_0$  est donc le seul point col pour ce relief dans  $\mathcal{D}$ .*
3. *Le domaine  $\mathcal{D} \setminus \{x_0\}$  est la réunion de  $p + 1$  domaines accessibles, ces domaines étant éventuellement non bornés.*

4. On note  $\Psi_a : x \rightarrow \Psi(x, u_0(x), a, 0)$ . L'application

$$\begin{aligned} J : \mathbb{C}^p &\longrightarrow \mathbb{C}^p \\ a &\longrightarrow (\Psi_a(x_0), \Psi'_a(x_0), \dots, \Psi_a^{(p-1)}(x_0)) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme local au voisinage de  $a_0$ .

Alors l'équation différentielle admet une solution canard  $u(x)$ , voisine de  $u_0$ , pour une valeur du paramètre  $a$  tendant vers  $a_0$  avec  $\varepsilon$ .

Ce dernier théorème d'existence sera redémontré au § 3.3 (d'une autre manière que dans l'article cité).

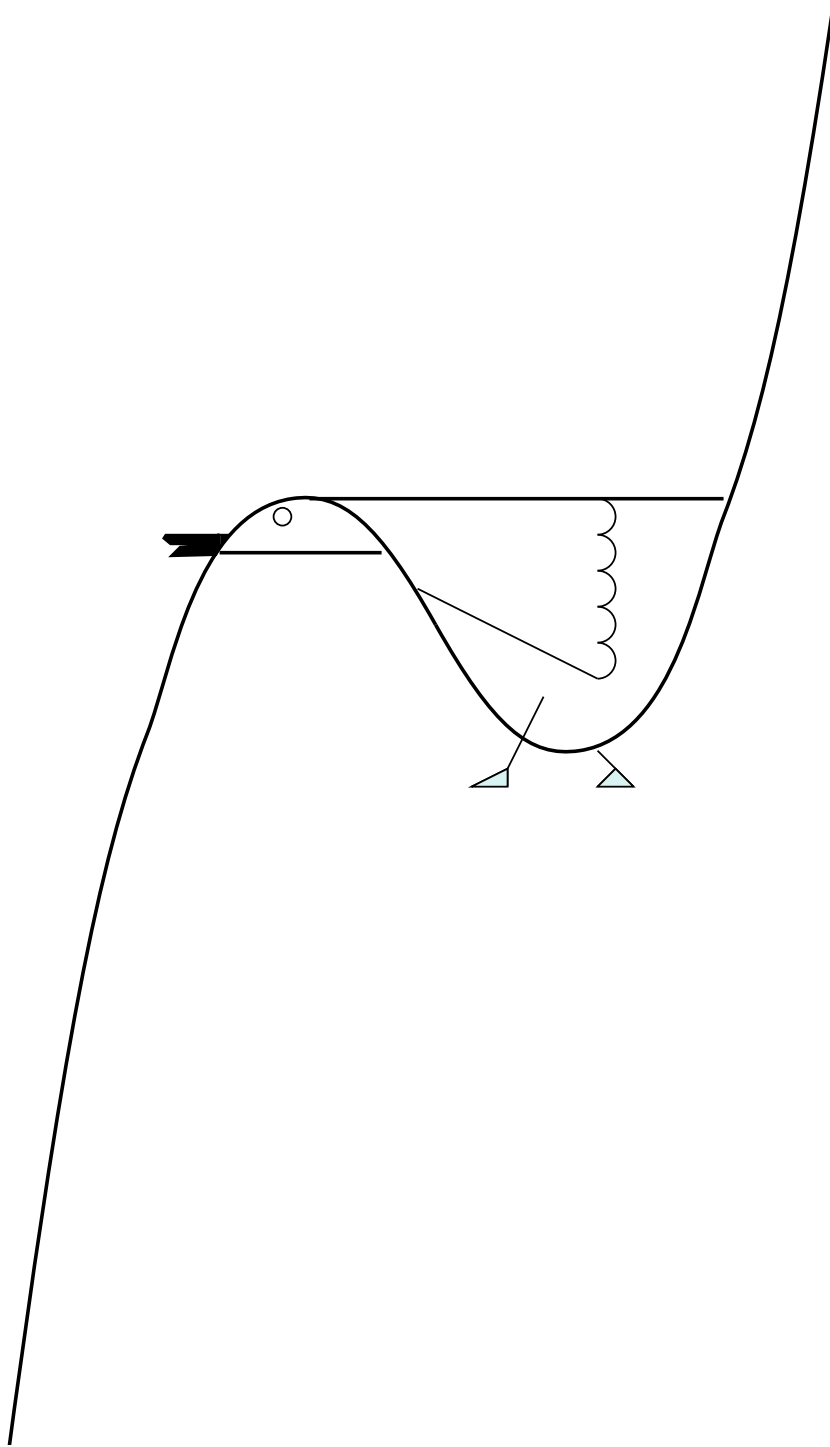


FIG. 2: Canard, dit úde Van der Polz

## Chapitre 2

# Les canards de Van der Pol

### 2.1 Introduction

L'équation de van der Pol [13]

$$\varepsilon \ddot{u} + (u^2 - 1)\dot{u} + u = 0$$

est un exemple connu d'équation différentielle dont les solutions présentent des oscillations rapides entre deux périodes de relaxation.

On considèrera ici l'équation de van der Pol «forcée»

$$\varepsilon \ddot{u} + (u^2 - 1)\dot{u} + u = \alpha$$

où  $\dot{u}$  désigne la dérivée  $\frac{du}{dt}$ , où  $\varepsilon$  est un paramètre arbitrairement petit et  $\alpha$  un paramètre réel.

Dans toute la suite, on se limitera au cas  $\alpha \geq 0$  (le cas  $\alpha$  négatif lui étant symétrique).

Pour étudier les solutions de cette équation, on se place dans le plan des phases (ou plan de Liénard, [10]), en prenant le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{u} &= y - \frac{u^3}{3} + u \\ \dot{y} &= \alpha - u \end{cases}$$

Une étude sommaire à partir de ce système montre que, pour  $\alpha > 1$ , la trajectoire rejoint rapidement le voisinage de la cubique d'équation  $y = u^3/3 - u$ , puis joint le point  $A(\alpha, \alpha^3/3 - \alpha)$  qui est stationnaire. Pour  $\alpha < 1$ ,  $\alpha$  pas trop proche de 1, la trajectoire finit par contre en un cycle comprenant deux parties stables de la cubique et deux segments horizontaux (cf. figure 3). Une étude locale au voisinage de  $A$  montre d'ailleurs qu'il y a une bifurcation de Hopf au voisinage de  $\alpha = 1$  : le point stationnaire  $A$  est attractif si  $\alpha < 1$ , et répulsif si  $\alpha > 1$  et on a dans ce cas un cycle limite dont la taille est d'ordre  $\sqrt{1 - \alpha}$  (pour les  $\alpha$  très peu différents de 1).

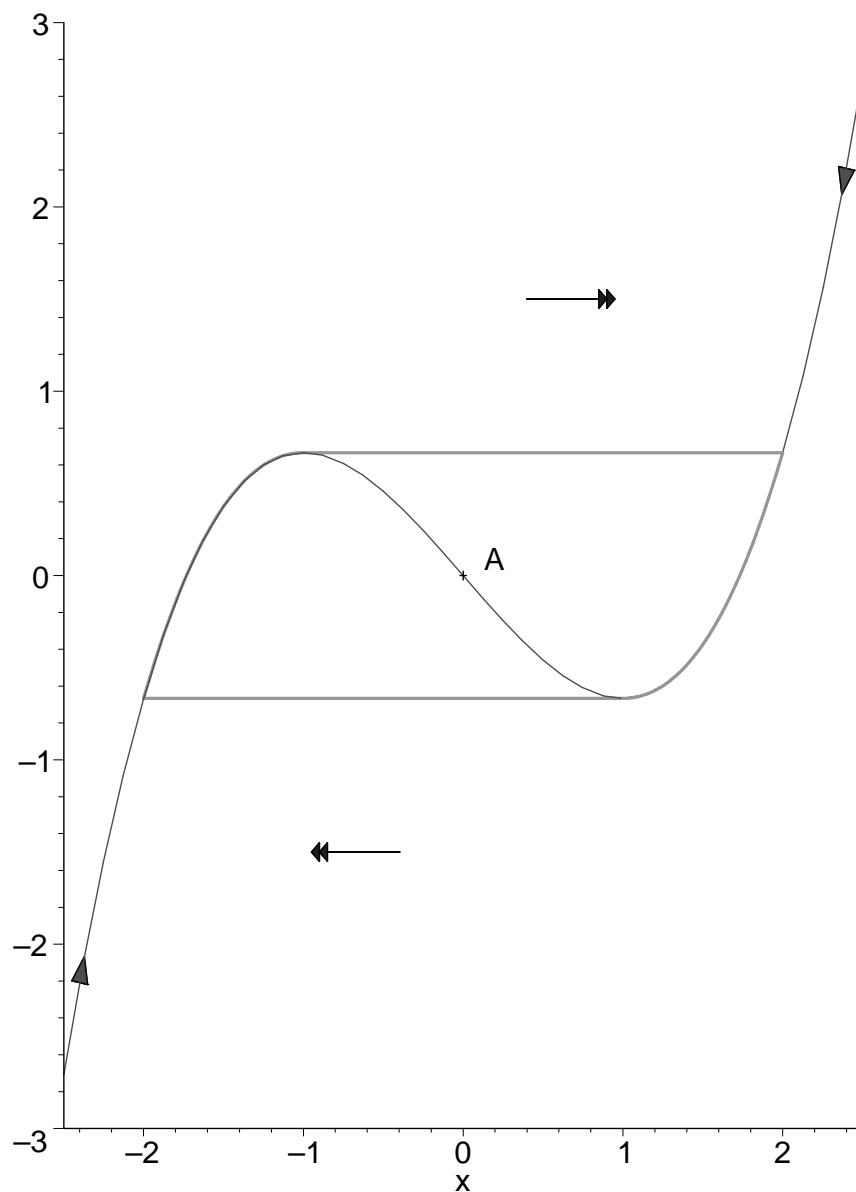


FIG. 3: Cycle pour  $\alpha = 0$

Le phénomène dont il est question ici est cependant distinct, quoique très voisin quand on fait varier  $\alpha$ , de celui de la bifurcation. Il a été découvert quand E. Benoît, J.L. Callot, F. et M. Diener ont cherché à voir, d'abord numériquement, comment on passait (pour  $\alpha < 1$ ) d'un cycle de petite taille  $\sqrt{1 - \alpha}$  au cycle beaucoup plus grand de la figure 3; d'après la propriété de dépendance continue des solutions (et donc du cycle) par rapport au paramètre  $\alpha$  (qui intervient de manière non singulière dans l'équation), on savait qu'il devait exister un régime

intermédiaire entre ces deux cycles.

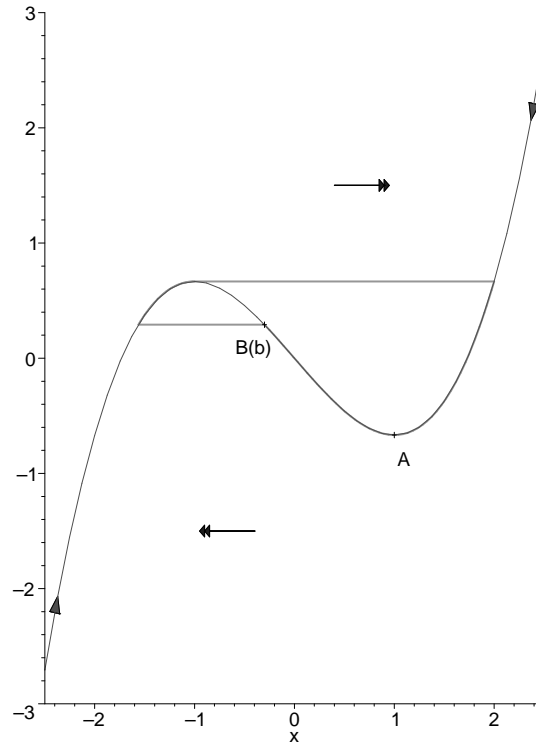


FIG. 4: Canard intermédiaire ; B, d'abscisse  $b$ , est appelé *icolz* du canard

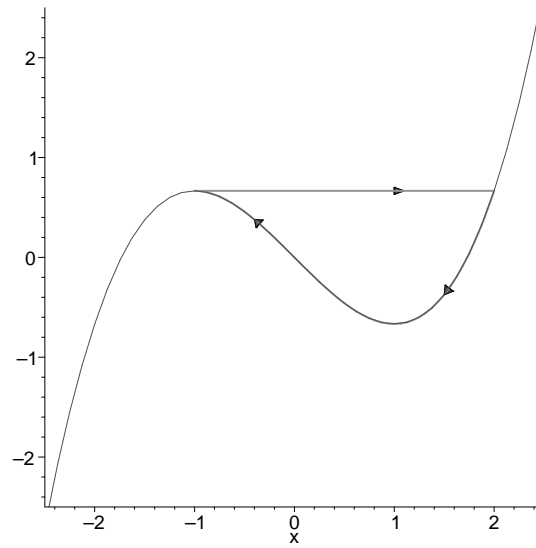


FIG. 5: Grand canard

Les premiers résultats obtenus sur ce problème sont les suivants : pour  $\varepsilon$  arbi-

trairement petit fixé, on montre [1] que quand  $\alpha$  varie au voisinage de 1, on peut obtenir un régime intermédiaire entre les deux types de trajectoires cités, dans lequel la trajectoire suit la cubique sur un morceau (aussi grand que l'on veut) de la partie instable de cette courbe ; on appelle les solutions correspondantes des « canards ». Plus précisément,

1. pour des valeurs  $\check{\alpha}$  voisines de 1 bien choisies, la trajectoire suit la cubique entre ses deux sommets  $(1, -\frac{2}{3})$ ,  $(-1, \frac{2}{3})$  : on a alors ce qu'on appelle des « grands canards » (cf. figure 5) ;
2. la trajectoire suit la cubique jusqu'au point d'abscisse  $b \in ]-1, 1[$  si et seulement si  $|\alpha - \check{\alpha}| = \exp[-\frac{1}{\varepsilon}(R(b) + o_\varepsilon(1))]$ , où  $\check{\alpha}$  est une des valeurs à grand canard, et  $R(b) = \int_1^b (\xi - 1)(\xi + 1)^2 d\xi$  (voir figure 4, et la figure 2 pour l'origine de l'appellation de « canard ») ;
3. si  $\check{\alpha}$  est une valeur à grand canard, la trajectoire passe aussi dans un voisinage de taille  $\varepsilon$  du point  $(u = 1, y = -2/3)$  et la solution du système correspondante est donc nécessairement continue en ce point (ou plutôt : bornée en  $\varepsilon$  dans un voisinage de ce point).

Ce sont ces solutions particulières qui vont être étudiées. Dans ce but, on effectue le changement de variables suivant, pour se placer au voisinage de la cubique :  $y = \frac{u^3}{3} - u + \varepsilon v$ , ce qui nous mène au système

$$\begin{cases} \dot{u} &= v \\ \varepsilon \dot{v} &= v(1 - u^2) + \alpha - u \end{cases}$$

On élimine la variable temporelle :

$$\varepsilon v \frac{dv}{du} = (1 - u^2)v + \alpha - u. \quad (\text{E})$$

Comme courbe lente pour cette équation (*i.e.* pour le paramètre  $\varepsilon = 0$ ), on trouve la fonction  $u \mapsto -\frac{\alpha - u}{1 - u^2}$ , qui n'est continue en 1 que si  $\alpha = 1$ . Dans ce cas, on trouve facilement la solution formelle

$$\hat{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n \quad \hat{v}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(u) \varepsilon^n$$

avec les formules de récurrence suivantes

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 1 & a_{n+1} &= \sum_{j=0}^n v_j(1) v'_{n-j}(1) \\ v_0(u) &= \frac{-1}{u+1} & v_{n+1}(u) &= v_0(u) \frac{\sum_{j=0}^n v_j(u) v'_{n-j}(u) - a_{n+1}}{u-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Une étude de cette série, réalisée par M. Canalis-Durand avec les outils de l'analyse Gevrey, a montré qu'elle était divergente, mais Gevrey d'ordre 1 [5].

Dans [7], en étudiant l'équation dans le champ complexe, il est démontré que :

1. pour  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ , il existe une unique solution  $(\alpha^+, v^+)$  tel que la solution  $v^+$  existe en particulier, pour n'importe quel  $\rho$  réel positif, dans l'ensemble du secteur infini  $S(-1 + \rho, -\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}) = \{z \in \mathbb{C} / \arg(z + 1 - \rho) \in ]-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}[ \}$ ;  $v^+$  correspond dans son domaine de définition à la solution formelle  $\hat{v}$ ;
2. pour  $\alpha^- = \overline{\alpha^+}$ , on obtient aussi une vraie solution  $v^-$  existant dans un domaine symétrique de celui de  $v^+$ ;
3. il existe une solution  $(\alpha(\varepsilon), v(u, \varepsilon))$  holomorphe en  $\varepsilon$  avec une singularité en  $\varepsilon = 0$  qui prolonge la solution  $(\alpha^+, v^+)$  dans un large secteur centré en 0 (pour la variable  $\varepsilon$ ); cette solution vérifie en plus la propriété :  $\alpha^-(\varepsilon) = \alpha(\varepsilon e^{-2i\pi})$ ,  $v^-(u, \varepsilon) = v(\overline{u}, \varepsilon e^{-2i\pi})$ .
4. pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{C}$  assez petit tel que  $|\arg(\varepsilon)| < \frac{\pi}{2} + \delta$ , on a

$$|\alpha(\varepsilon e^{-2i\pi}) - \alpha(\varepsilon)| \leq \exp\left(\Re\left(\frac{R(-1 + \delta')}{\varepsilon}\right)\right)$$

où  $\delta$  et  $\delta'$  sont des constantes positives, et  $R(x) = \int_1^x (t-1)(t+1)^2 dt$ .

L'analyse à partir de cette série formelle ne permet pas cependant de voir ce qui se passe au voisinage de  $(-1)$ , puisque la courbe lente y a une singularité; alors que le dernier résultat ci-dessus laisse penser qu'on gagnerait en précision si on pouvait remplacer  $\delta'$  par quelquechose qui tend vers 0 avec  $\varepsilon$ .

Nous allons regarder spécifiquement ce qui se passe en ce point en introduisant un nouveau changement de variable qui crée une loupe près de  $(-1)$  :

$$u = -1 + \varepsilon^{1/3} X \quad , \quad v = \varepsilon^{-1/3} Y$$

d'où

$$(E) \iff Y \frac{dY}{dX} = 2XY \left(1 - \frac{\varepsilon^{1/3}}{2} X\right) + \alpha + 1 - \varepsilon^{1/3} X \quad (E')$$

La courbe lente ( $\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha \rightarrow 1$ ) suivra l'équation

$$Y_0 \frac{dY_0}{dX} = 2XY_0 + 2 \quad (2.2)$$

Nous allons étudier les solutions de (2.2) bornées à l'infini et montrer qu'il existe une vraie solution de l'équation différentielle (E') qui admette un développement asymptotique du type  $Y(X, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(X) \varepsilon^{n/3}$ . Cette solution correspondra donc aussi à la série formelle obtenue de (2.1) par le changement de variable ;



l'intersection de son domaine d'existence avec le domaine de  $z^+$  étant non nulle et comme elles sont égales dans cette intersection, par unicité,  $Y(X, \varepsilon)$  sera le prolongement analytique de  $z^+$  jusqu'au point  $-1$ .

L'existence de cette solution permettra de trouver un équivalent exact de la différence  $\alpha^+ - \alpha^-$  (paragraphe 2.4). À l'aide de cet équivalent, nous en déduirons ensuite un équivalent pour les coefficients  $a_n$  de  $\alpha$  (dans le paragraphe 2.5).

## 2.2 Étude de la courbe lente

Il est possible de donner, d'une certaine manière, une solution exacte de l'équation de la courbe lente (2.2) qui vérifie les conditions aux limites voulues. Plus exactement, nous allons démontrer le théorème suivant :

**Théorème 3** *Il existe des solutions de l'équation différentielle*

$$(2.2) \quad Y_0 \frac{dY_0}{dX} = 2XY_0 + 2$$

*qui tendent vers 0 en l'infini et dont les domaines d'existence contiennent des secteurs ouverts d'ouverture au moins  $\frac{2\pi}{3}$  en l'infini. En particulier, il y en a une qui est holomorphe dans un secteur  $S\left(\infty, \varrho, -\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ , et une autre dans un domaine symétrique contenant  $S\left(\infty, \varrho, -\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ . Ces deux solutions peuvent être prolongées jusqu'en 0.*

Pour démontrer ce théorème, on commence par effectuer le changement de variable suivant :

$$Y_0(X) = X^2 + z(X) \implies (2.2) \quad z'(X) = \frac{2}{X^2 + z(X)}$$

On regarde ensuite la fonction réciproque de la fonction  $X \mapsto z(X)$  : on considère en fait  $z \mapsto X(z)$  ; on sait, d'après les théorèmes sur les fonctions implicites que si  $z'$  ne s'annule pas, la dérivée de  $X$  s'écrira :

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{X^2(z) + z}{2}. \quad (2.3)$$

On pose ensuite

$$X = -2\frac{u'}{u}, \quad \text{d'où} \quad u'' + \frac{1}{4}uz = 0, \quad \text{qui est une équation d'Airy.}$$

Les solutions de l'équation d'Airy peuvent toutes s'écrire (par exemple) à partir des fonctions d'Airy **Ai** et **Bi**.

On note

$$\mu = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}, \quad j = e^{2i\pi/3}.$$

Une des solutions correspondra par exemple à  $u = \text{Ai}(-\mu j^2 z)$  :

$$x = 2\mu j^2 \frac{\text{Ai}'(-\mu j^2 z)}{\text{Ai}(-\mu j^2 z)}$$

Or, les résultats connus (voir [11]) sur  $\text{Ai}$  sont :

$$\begin{aligned} \text{Ai}(z) &= \frac{e^{-\xi}}{2\sqrt{\pi}z^{1/4}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) \\ \text{Ai}'(z) &= \frac{-e^{-\xi}z^{1/4}}{2\sqrt{\pi}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) \end{aligned} \tag{2.4}$$

où  $\xi = \frac{2}{3}z^{3/2}$  (en prenant la valeur principale de la racine), ceci pour

$$-\pi + \delta \leq \arg z \leq \pi - \delta \quad (\delta > 0).$$

Comme  $\arg(-\mu j^2 z) = \arg(z) + \pi/3$ , on s'intéresse aux  $z$  tels que  $-\frac{4\pi}{3} + \delta \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{3} + \delta$ , et on voit que dans ce cas

$$\begin{aligned} X^2(z) &= 4 \frac{u'^2(z)}{u^2(z)} = 4\mu^2 j^4 (-\mu j^2 z) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) \\ &= -z + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{|z|}}\right). \end{aligned}$$

Cette dernière égalité permet d'affirmer, en utilisant le théorème d'inversion locale, que la fonction  $z \mapsto X(z)$  a un inverse quand  $z$  est dans un voisinage de l'infini dans le secteur proposé, soit la fonction  $X \mapsto z(X)$ .

Et alors  $Y_0(X) = X^2 + z(X) = \mathcal{O}(1/\sqrt{|z|})$  tend vers 0 quand  $X \rightarrow \infty$  pour

$$-\frac{\pi}{6} + \delta' \leq \arg X \leq \frac{5\pi}{6} - \delta'$$

On obtient bien une solution  $Y_0$  bornée sur un large secteur de sommet  $O$ . D'après l'équation différentielle (2.2),  $Y_0$  ne pourrait tendre vers l'infini que quand  $X$  tend vers l'infini. En effet, supposons qu'il existe une suite de points  $(X_n)$  convergeant vers un point fini  $X_\infty$ , telle que  $Y_0(X_n)$  soit une suite non bornée. Alors la fonction  $u_0 = 1/Y_0$  vérifie l'équation

$$\frac{du_0}{dX} = -2Xu_0^2 - 2u_0^3,$$

et elle est telle que  $u_0(X_n) \rightarrow 0$ . Comme  $u_0$  n'a pas de singularité en  $X_\infty$ , et que d'après le théorème de Painlevé elle vérifie  $u_0(X_\infty) = 0$ , il s'agit de la l'unique solution de son équation qui s'annule en  $X_\infty$ , donc de la fonction nulle. Ce qui est absurde. Les seules singularités de  $Y_0$  sont donc des zéros de  $Y_0$ .

L'équation différentielle nous indique aussi que

$$Y_0 \underset{X \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{X} :$$

comme  $Y_0$  est bornée dans un domaine comprenant un secteur en l'infini, d'après la formule de Cauchy,  $Y_0'$  est bornée elle aussi à l'intérieur de ce domaine. Donc quand  $X$  devient grand, on a nécessairement que  $2XY_0 + 2 \rightarrow 0$ . D'où le résultat.

Si on veut aller plus loin dans le développement de  $Y_0$ , il suffit de décomposer la fonction  $Y_0 = -1/X + \tilde{Y}$ . La fonction  $\tilde{Y}$  est solution (bornée quand  $X$  devient grand dans le bon secteur) de

$$\tilde{Y}'\tilde{Y} = 2X\tilde{Y} + \frac{1}{X^3} - \frac{\tilde{Y}}{X^2} + \frac{\tilde{Y}'}{X}.$$

$\tilde{Y} = o(1/X)$ ; avec Cauchy, on en déduit donc que  $\tilde{Y}'$  est au plus un  $o(1/X^2)$ . Dans l'équation différentielle, les deux termes les plus importants sont cette fois  $2X\tilde{Y}$  et  $1/X^3$ , donc  $\tilde{Y} \sim -1/2X^4$ .

Au total,

$$Y_0 = -\frac{1}{X} - \frac{1}{2X^4} + o\left(\frac{1}{X^4}\right).$$

On peut montrer que la solution proposée existe aussi sur l'ensemble du demi-axe  $\{z \in \mathbb{C} / \arg z = -\frac{\pi}{3}\}$ .

En effet, pour  $z = -jt$  ( $t \in \mathbb{R}^+$ ),

$$\begin{aligned} X(z) &= 2\mu j^2 \frac{\text{Ai}'(\mu t)}{\text{Ai}(\mu t)} & \arg X(z) &= \arg j^2 + \pi - 0 = \frac{\pi}{3} \\ \frac{dX}{dt} &= \frac{dX}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{X^2(z) + z}{2}(-j) = -\frac{j^2}{2} \left( 4\mu^2 \frac{\text{Ai}'^2(\mu t)}{\text{Ai}^2(\mu t)} - t \right). \end{aligned}$$

Le calcul de la dérivée de  $4\mu^2 \text{Ai}'^2(\mu t) - t \text{Ai}^2(\mu t)$ , montre qu'elle est nulle; cette fonction est par conséquent une fonction constante, et réelle, donc  $\frac{-1}{j^2} \frac{dx}{dt}$  est une fonction réelle qui garde un signe constant (puisqu'on l'obtient de la précédente en divisant par  $\text{Ai}^2(\mu t) \in \mathbb{R}^+$ ).

D'où l'on peut déduire que  $t \mapsto \frac{x(t)}{-j^2}$  est réelle et uniforme sur  $\mathbb{R}^+$ , donc inversible.

On peut bien sûr prolonger analytiquement cette fonction sur tout domaine simplement connexe ne contenant pas de singularité de  $Y_0$  (les seules singularités possibles étant les points où  $Y_0$  s'annule). Cela semble être le cas par exemple (quand on fait des simulations numériques) du quart de plan ( $\Re z \geq 0, \Im z \geq 0$ ). On sait en tous cas que  $Y_0$  existe sur une partie de l'axe réel, à partir d'un réel  $X_l \geq 0$  jusqu'au voisinage de l'infini.

### 2.3 Existence d'une solution de (E'), $Y(X, \varepsilon)$ , qui est voisine de $Y_0$

Nous utiliserons un théorème de point fixe pour montrer que certaines solutions de E' tendent vers  $Y_0$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0.

$$(E') \quad YY' = 2XY \left(1 - \frac{\varepsilon'}{2}X\right) + \alpha + 1 - \varepsilon'X, \quad \text{avec } \varepsilon' = \varepsilon^{1/3}$$

On écrit  $Y$  sous la forme  $Y = Y_0 + \varepsilon'Z$ . On rappelle (2.2) :  $Y_0Y_0' = 2XY_0 + 2$ .  
Alors

$$\begin{aligned} Y_0Y_0' + \varepsilon'Z'(Y_0 + \varepsilon'Z) + \varepsilon'Z \left(2X + \frac{2}{Y_0}\right) \\ = 2XY_0 - \varepsilon'X^2Y_0 + \varepsilon'ZX(2 - \varepsilon'X) + \alpha - 1 + 2 - \varepsilon'X \\ \iff Z' = -X^2 + \frac{a/\varepsilon' - X - 2Z/Y_0}{Y_0 + \varepsilon'Z} \\ \text{avec } a = \alpha - 1 = \mathcal{O}(\varepsilon) = o(\varepsilon'). \end{aligned}$$

Après linéarisation de cette équation différentielle, on obtient

$$Z' = -X^2 + u_0 \left(\frac{a}{\varepsilon'} - X\right) - Z \left(u_0^2(2 + a - \varepsilon'X)\right) + \varepsilon'h(Z, X, \varepsilon') \quad (2.5)$$

$$\text{où } u_0(X) = \frac{1}{Y_0(X)} = -X + \frac{1}{2X^2} + o\left(\frac{1}{X^2}\right)$$

$$\text{et } h(Z, X, \varepsilon') = Z^2u_0^3 \frac{2 + a - \varepsilon'X}{1 + \varepsilon'u_0Z}. \quad (2.6)$$

On introduit les fonctions

$$\begin{aligned} F(x) &= \int^x -u_0^2(t)(2 + a - \varepsilon't)dt, \\ \text{et } R(x) &= \Re(F(x)). \end{aligned}$$

On désignera par  $\gamma_X$  un chemin dans le plan complexe partant d'un point (éventuellement infini) à déterminer et allant jusqu'à  $X$ .

En intégrant l'équation différentielle avec la méthode de variation de la constante, on voit que  $Z$  satisfait à l'égalité :

$$Z(X) = \int_{\gamma_X} e^{F(X)-F(t)} \left( -t^2 + u_0(t) \left( \frac{a}{\varepsilon'} - t \right) + \varepsilon' h(Z, t, \varepsilon') \right) dt.$$

On souhaite montrer qu'on peut appliquer un théorème de point fixe, pour montrer qu'il existe une et une seule solution à l'équation (E') qui tend vers  $Y_0$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0. On se place pour cela dans un domaine ouvert  $\mathcal{D}$  (qui sera précisé par après) et on considère deux solutions notées  $Y_1$  et  $Y_2$  arbitrairement proches de  $Y_0$ .

Soit alors  $h_i = h(Y_i, t, \varepsilon')$ , pour  $i = 1, 2$ .

On trouve

$$h_1 - h_2 = \left[ u_0(t)(2 + a - \varepsilon't) \right] \left[ u_0(t)(Y_1 - Y_2) \right] \frac{(Y_1 + Y_2)u_0 + \varepsilon'Y_1Y_2u_0^2}{(1 + \varepsilon'Y_1u_0)(1 + \varepsilon'Y_2u_0)}$$

On est donc amené à introduire les espaces fonctionnels suivants :

$$\begin{aligned} \mathfrak{H} &= \left\{ \text{fonctions holomorphes } h \text{ sur } \mathcal{D} \left/ \sup_{t \in \mathcal{D}} \frac{|h(t)|}{|u_0(t)| \cdot |2 + a - \varepsilon't|} \text{ soit fini} \right. \right\} \\ \mathfrak{Y} &= \left\{ \text{fonctions holomorphes } Y \text{ sur } \mathcal{D} \left/ \sup_{t \in \mathcal{D}} |Y(t)| \cdot |u_0(t)| \text{ soit fini} \right. \right\} \end{aligned}$$

que l'on munit des normes correspondantes  $\|h\|_{\mathfrak{H}}$  et  $\|Y\|_{\mathfrak{Y}}$  respectivement.

$$\begin{array}{ccc} \text{Soit} & \mathbf{o}_H : \tilde{\mathfrak{Y}} \rightarrow \mathfrak{H} & \text{et} & \mathbf{o}_Y : \tilde{\mathfrak{H}} \rightarrow \mathfrak{Y} \\ & Y \mapsto h(Y, t, \varepsilon') & & h \mapsto Z(X) \end{array}$$

Ces deux opérateurs sont bien définis au moins sur des sous-ensembles  $\tilde{\mathfrak{H}}$  et  $\tilde{\mathfrak{Y}}$  des espaces  $\mathfrak{H}$  et  $\mathfrak{Y}$  (ceci sera précisé plus loin).

Nous allons montrer que l'opérateur  $\mathbf{o}_Y \mathbf{o}_H$  est une contraction sur ces ensembles.

$$\|h_1 - h_2\|_{\mathfrak{H}} \leq \|Y_1 - Y_2\|_{\mathfrak{Y}} \frac{\|Y_1\|_{\mathfrak{Y}} + \|Y_2\|_{\mathfrak{Y}} + |\varepsilon'| \cdot \|Y_1\|_{\mathfrak{Y}} \|Y_2\|_{\mathfrak{Y}}}{(1 - |\varepsilon'| \cdot \|Y_1\|_{\mathfrak{Y}})(1 - |\varepsilon'| \cdot \|Y_2\|_{\mathfrak{Y}})}$$

donc si  $\|Y_1\|_{\mathfrak{Y}}$  et  $\|Y_2\|_{\mathfrak{Y}}$  sont majorées par  $\delta$ , et pour  $\varepsilon' < 1/\delta$ , on a

$$\|h_1 - h_2\|_{\mathfrak{H}} \leq \|Y_1 - Y_2\|_{\mathfrak{Y}} \frac{2\delta + |\varepsilon'|\delta^2}{(1 - |\varepsilon'|\delta)^2}. \quad (2.7)$$

Par ailleurs, si  $Y_k(X, \varepsilon') = \mathbf{o}_Y(h_k(X, \varepsilon'))$ ,

$$Y_1 - Y_2 = \int_{\gamma_X} e^{F(X)-F(t)} \varepsilon' (h_1 - h_2) dt$$

d'où

$$\begin{aligned} \|Y_1 - Y_2\|_{\mathfrak{Y}} &\leq \sup_{X \in \mathcal{D}} |u_0(X)| |\varepsilon'| \int_{\gamma_X} e^{R(X)-R(t)} |h_1 - h_2| dt \\ &\leq |\varepsilon'| \cdot \|h_1 - h_2\|_{\mathfrak{H}} \sup_{X \in \mathcal{D}} e^{R(X)} \int_{\gamma_X} e^{-R(t)} \left| u_0^2(t) (2 + a - \varepsilon' t) \right| \left| \frac{u_0(X)}{u_0(t)} \right| dt \end{aligned}$$

Choisissons un  $X$  tel que : pour tout  $X'$  tel que  $|X'| \geq |X|$ ,  $u_0(X')$  est peu différent de  $-X'$ . Plus précisément, on va choisir  $\gamma_X$  et  $X$  tels que :

1.  $\gamma_X(t) \in \mathcal{D}$  pour tout  $t$ .
2.  $\gamma_X$  va de l'infini à  $X$  avec  $\gamma_X(t) = e^{i\theta}t$ , où  $t$  est un réel allant de  $+\infty$  à  $|X|$ , et  $\theta = \arg X$ .

Alors, pour  $\theta$  dans l'intervalle  $\left] \frac{3\pi}{8} + \delta, \frac{\pi}{2} - \delta \right]$ ,

$$\begin{aligned} F(X) - F(t) &= \int_{|X|e^{i\theta}}^{|t|e^{i\theta}} -u_0^2(\phi)(2 + a - \varepsilon'\phi) d\phi \quad t = |t|e^{i\theta} \\ &= \int_{|X|}^{|t|} (2 + a)(-\phi^2) d\phi + \varepsilon' \int_{|X|}^{|t|} \phi^3 d\phi + o(|t|^2) \\ &= \frac{2+a}{3} e^{i(3\theta-\pi)} |t|^3 + \frac{\varepsilon'}{4} e^{4i\theta} |t|^4 + o(|t|^2) \end{aligned}$$

La partie réelle de cette dernière expression est positive, (pour  $|t|$  assez grand donné indépendamment de  $|\varepsilon'|$ , pour tout  $\arg(\varepsilon')$  assez voisin de 0) et croissante avec  $|t|$ . Donc si on choisit un  $X$  assez grand, il existe un  $\mu > 0$  tel que

$$\mu \left| \frac{d}{dt} R(\gamma_X(t)) \right| \geq \left| F'(\gamma_X(t)) \right|, \text{ pour tout } t, \quad (2.8)$$

d'où on déduit

$$\begin{aligned} \|Y_1 - Y_2\|_{\mathfrak{Y}} &\leq |\varepsilon'| \cdot \|h_1 - h_2\|_{\mathfrak{H}} \sup_{X \in \mathcal{D}} e^{R(X)} \int_{\gamma_X} e^{-R(t)} \mu \left| \frac{d}{dt} R(\gamma_X(t)) \right| dt \\ \|Y_1 - Y_2\|_{\mathfrak{Y}} &\leq |\varepsilon'| \cdot \mu \cdot \|h_1 - h_2\|_{\mathfrak{H}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Nous pouvons maintenant préciser le domaine  $\mathcal{D}$  :

- $\mathcal{D} \subset (\text{Domaine de } Y_0)$  (pour que  $u_0$  soit définie).
- Tout point de  $X \in \mathcal{D}$  peut être joint de l'infini par un chemin  $\gamma_X$  vérifiant (2.8).
- $(2 + a - \varepsilon' t)$  ne s'annule pas pour  $t$  dans ce domaine.

Le domaine  $\mathcal{D}$  n'est pas vide : avec les conditions données, on peut prendre par exemple pour  $\mathcal{D}$  un secteur  $S\left(\infty, 2|X_f|, \frac{3\pi}{8} + \delta, \frac{\pi}{2} - \delta\right)$ .

Alors, pour  $\varepsilon$  assez petit, les inégalités (2.7) et (2.9) signifient que  $\mathfrak{o}_Y \mathfrak{o}_H$  peut être un opérateur contractant.

Il ne reste qu'à vérifier qu'on a bien  $\mathfrak{o}_Y(\mathfrak{H}) \subset \mathfrak{Y}$  et que  $\mathfrak{o}_H(\mathfrak{y}) \subset \mathfrak{H}$  où  $\mathfrak{y}$  est une boule ouverte de  $\mathfrak{Y}$ .

Si  $Y \in \mathfrak{Y}$  et  $\|Y\|_{\mathfrak{Y}} < \frac{1}{2\varepsilon'}$  (on a là la description de l'ensemble  $\mathfrak{y}$ ), alors

$$\mathfrak{o}_H(Y) = h(Y, X, \varepsilon') = u_0(X)(Y(X)u_0(X))^2 \frac{2 + a - \varepsilon' X}{1 + \varepsilon' u_0(X)Y(X)}$$

$$\|h(Y, X, \varepsilon')\|_{\mathfrak{H}} \leq \sup_{X \in \mathcal{D}} \left| \frac{(yu_0)^2}{1 + \varepsilon' u_0 y} \right|$$

qui est bien borné, et à  $Y$  fixé est aussi borné pour tout  $\varepsilon'$  assez petit, puisque  $|u_0 Y|$  est borné pour  $X \in \mathcal{D}$  quand  $Y \in \mathfrak{Y}$ .

Si  $h \in \mathfrak{H}$ ,

$$\begin{aligned} \mathfrak{o}_Y(h) &= Z(h, X, \varepsilon') \\ &= \int_{\gamma_X} e^{F(X)-F(t)} \left( -t^2 + u_0(t) \left( \frac{a}{\varepsilon'} - t \right) + \varepsilon' h(t, \varepsilon') \right) dt \\ &= Z(0, X, \varepsilon') + (Z(h, X, \varepsilon') - Z(0, X, \varepsilon')) \end{aligned}$$

La différence dans la parenthèse ne posant pas de problèmes vu ce qui a été montré ci-dessus (la fonction nulle est clairement dans l'espace  $\mathfrak{H}$ ), on regarde uniquement le premier terme.

$$Z(0, X, \varepsilon') = \int_{\gamma_X} e^{F(X)-F(t)} \left( -t^2 + u_0(t) \left( \frac{a}{\varepsilon'} - t \right) \right) dt$$

On retrouve quelque chose d'analogue à la démonstration concernant la différence des fonctions  $Y_1 - Y_2$ .

$$\begin{aligned} \|Z(0, X, \varepsilon')\|_{\mathfrak{Y}} &\leq \frac{1}{|\varepsilon'|} \sup_{X \in \mathcal{D}} |u_0(X)| \int_{\gamma_X} e^{R(X)-R(t)} |-t^2 \varepsilon' + u_0(t)(a - \varepsilon' t)| dt \\ &\leq \frac{1}{|\varepsilon'|} \cdot \sup_{X \in \mathcal{D}} e^{R(X)} \int_{\gamma_X} e^{-R(t)} |-t^2 u_0 \varepsilon' + u_0^2(t)(a - \varepsilon' t)| \left| \frac{u_0(X)}{u_0(t)} \right| dt \\ \|Z(0, X, \varepsilon')\|_{\mathfrak{Y}} &\leq \| -u_0 \varepsilon' t(u_0(t) + t) + a u_0^2(t) \|_{\mathfrak{H}} \sup_{X \in \mathcal{D}} e^{R(X)} \int_{\gamma_X} e^{-R(t)} \mu \left| \frac{d}{dt} R(\gamma_X(t)) \right| dt \end{aligned}$$

La fonction  $-u_0 \varepsilon' t(u_0(t) + t) + a u_0^2(t)$  est bien dans  $\mathfrak{H} : u_0(t) = -t + o(1/t)$ , donc la fonction est majorée par  $|u_0(t)(1 + |at| + |\varepsilon'|)| < |u_0(t)(2 + a - \varepsilon' t)|$  pour tout  $\varepsilon$  assez petit.

$$\|Z(0, X, \varepsilon')\|_{\mathfrak{Y}} \text{ existe bien, } Z(0, X, \varepsilon') \in \mathfrak{Y}.$$

On peut donc appliquer le théorème du point fixe, ce qui nous donne l'existence et l'unicité de la solution de (2.5),  $Z(X, \varepsilon')$ , dans l'espace  $\mathfrak{Y}$  : cette fonction est holomorphe et tend vers 0 quand  $X \rightarrow \infty$ , pour tout  $\varepsilon'$ .

On en déduit :

**Théorème 4** *Il existe une solution  $Y_\varepsilon$  de (E') sur un domaine  $\mathcal{D}$  contenant un secteur ouvert centré en l'infini (de taille indépendante de  $|\varepsilon'|$ ) d'ouverture un peu inférieure à  $\pi/8$ .  $Y_\varepsilon$  tend vers 0 en l'infini et elle est telle que  $Y_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} Y_0$  uniformément.*

*Ce domaine  $\mathcal{D}$  peut même être encore étendu.*

Montrons qu'on peut, en effet, prendre un domaine  $\mathcal{D}$  plus grand que celui proposé. Comme l'équation (E') n'est pas singulière, les chemins  $\gamma_X$  peuvent être rallongés d'une distance arbitraire (mais finie) à partir de  $X_f$  (par exemple, on peut aller jusqu'à 0, ou  $X_l$ ) ; l'intégrale

$$\int_{\gamma_X} e^{R(x)-R(t)} |u_0^2(t)(2 + a - \varepsilon' t)| \left| \frac{u_0(X)}{u_0(t)} \right| dt$$

restera effectivement bornée si on évite les singularités de  $Y_0$ , puisque toutes les fonctions qu'elle contient sont holomorphes et donc bornées sur tout compact inclus dans leurs domaines de définition. Et puisqu'il n'y a pas dans cette intégrale de singularité en  $\varepsilon$ , on pourra choisir des bornes indépendantes de  $\varepsilon$ .



On peut même étendre  $\mathcal{D}$  sur une partie de l'axe réel, et ce jusque  $|\varepsilon|^{-1/3}$  par exemple. En effet, supposons que l'on ait déjà prolongé  $\gamma_X$  de  $X$  à  $X_l$ , puis éventuellement à  $X_0 \in \mathbb{R}^+$ ,  $X_0$  assez grand.

Alors

$$R(x) = \text{Cste} + \int_{X_0}^x -t^2(2 + a - \varepsilon't)dt + o(x^2)$$

$$\frac{d}{dt}R(t) = -t^2(2 + a - \varepsilon't) + o(t) \in \mathbb{R}^- \quad \text{si } t \leq \frac{1}{\varepsilon'}$$

(pour  $\varepsilon'$  assez petit,  $a$  étant de l'ordre de  $\varepsilon'^3$ )

$$\begin{aligned} \|Y_1 - Y_2\|_{\mathfrak{Y}} &\leq |\varepsilon'| \cdot \|h_1 - h_2\|_{\mathfrak{H}} \sup_x e^{R(x)} \int_0^{1/\varepsilon'} e^{-R(t)} \left( -\frac{d}{dt}R(t) \right) dt \\ &\leq |\varepsilon'| \cdot \|h_1 - h_2\|_{\mathfrak{H}} \times \text{Cste} \end{aligned}$$

ce qui implique une convergence uniforme sur  $[X_l, \varepsilon^{-1/3}]$ , puisque l'inégalité (2.7) reste bien sûr vérifiée tant que l'on ne s'approche pas des singularités où des zéros de la fonction  $u_0$ .

Cette solution  $Y_\varepsilon$  de (E') correspond à une solution  $v$  de (E) qui existe donc, pour  $\varepsilon > 0$ , au moins jusqu'en  $2|X_f|e^{i7\pi/16} \times \varepsilon^{1/3}$ , sur le segment  $[-1 + X_l\varepsilon^{1/3}, 0]$  et qui coïncide au voisinage de l'infini avec la solution  $y$  étudiée dans [7] : ce sont des prolongements holomorphes l'une de l'autre.

Cette solution  $Y_\varepsilon$  admet un développement asymptotique uniforme :

**Corollaire 5** *Il existe une suite de fonctions  $Y_n(X)$  holomorphes en  $X$  et tendant vers 0 quand  $X$  tend vers l'infini telle que, pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , et  $X \in \mathcal{D}$ ,*

$$\left| Y_\varepsilon(X, \varepsilon') - \sum_{n=0}^N Y_n(X) \varepsilon'^n \right| \leq \varepsilon'^{N+1} |R_N(X)|,$$

où la fonction bornée  $R_N$  vérifie en outre

$$\lim_{X \rightarrow \infty} R_N(X) = 0.$$

Le cas  $N = 0$  correspond au théorème précédent. On va démontrer le cas général par récurrence, à partir du cas  $N = 1$ . On reprend l'équation 2.5 :

$$Z' = -X^2 + u_0 \left( \frac{a}{\varepsilon'} - X \right) - Z \left( u_0^2(2 + a - \varepsilon'X) \right) + \varepsilon' h(Z, X, \varepsilon').$$

On a montré que  $Z(X, \varepsilon')$  était une fonction qui existait, dans l'espace  $\mathfrak{Y}$ , et que sa norme  $\|Z\|_{\mathfrak{Y}}$  était bornée indépendamment de  $\varepsilon'$ .

On définit  $Y_1$  comme solution de l'équation différentielle ci-dessus avec  $\varepsilon' = 0$  :

$$Y_1'(X) = -X^2 - Xu_0(X) - 2Y_1(X)u_0^2(X),$$

bornée dans  $\mathcal{D}$ . Dans le secteur  $[3\pi/8 + \delta, \pi/2 - \delta]$  considéré, le coefficient du terme homogène,  $-u_0^2(X)$ , a une partie réelle qui tend vers  $+\infty$ . Il existe donc une et une solution  $Y_1$  de l'équation différentielle qui soit bornée dans le secteur considéré. De plus, le terme non homogène est d'ordre au plus  $-X^2 - Xu_0(X) = o(1)$ ; on peut en déduire, comme pour  $Y_0$ , que  $Y_1(X)$  tend vers 0 en l'infini.

On pose maintenant  $Z(X, \varepsilon') = Y_1(X) + \varepsilon' Z_1(X, \varepsilon')$ .

Alors  $Z_1(X, \varepsilon')$  est solution de

$$\begin{aligned} \varepsilon' Z_1' &= u_0 \left( \frac{a}{\varepsilon'} \right) + \varepsilon' h(Z, X, \varepsilon') - (Y_1 + \varepsilon' Z_1) \left( u_0^2(2 + a - \varepsilon' X) \right) + 2Y_1 u_0^2 \\ Z_1' &= -Z_1(2 + a - \varepsilon' X)u_0^2 + u_0 \left( \frac{a}{\varepsilon'^2} \right) + u_0^2 Y_1 \left( X - \frac{a}{\varepsilon'} \right) + h(Z, X, \varepsilon'), \end{aligned}$$

ce qui est une équation différentielle linéaire en  $Z_1$  (le fait que  $Z$  puisse s'écrire en fonction de  $Z_1$  n'est pas gênant : on sait que cette fonction  $Z$  existe, et  $h(Z, X, \varepsilon')$  peut être considéré comme une donnée, comme fonction de  $\mathfrak{H}$ ).

On peut résoudre cette équation :

$$Z_1(X, \varepsilon') = e^{F(X, \varepsilon')} \int_{\gamma_X} e^{-F(t, \varepsilon')} \left( u_0(t) \left( \frac{a}{\varepsilon'^2} \right) + u_0^2(t) Y_1(t) \left( t - \frac{a}{\varepsilon'} \right) + h(Z, t, \varepsilon') \right) dt,$$

en rappelant que  $F(X, \varepsilon') = \int^X -u_0^2(t)(2 + a - \varepsilon't)dt$ .

Alors, puisque  $|u_0(t)(2 + a - \varepsilon't)| > 0$  dans  $\mathcal{D}$ , et que les fonctions  $\frac{h(Z(t, \varepsilon'), t, \varepsilon')}{u_0(t)}$  et  $Y_1(t)u_0(t)$  sont bornées, il est clair que  $Z_1(X, \varepsilon')$  est une fonction bornée, qui reste dans l'espace  $\mathfrak{Y}$ . Ce qui démontre le cas  $N = 1$ .

Pour la suite de la démonstration par récurrence, elle devient évidente à partir de l'équation différentielle obtenue pour  $Z_1$  : on va trouver à chaque fois  $Z_{n-1}(X, \varepsilon') = Y_{n-1}(X) + \varepsilon' Z_n$ , puis

$$Z_n' = -Z_1(2 + a - \varepsilon' X)u_0^2 + h_n(X, \varepsilon'),$$

avec  $h_n(X, \varepsilon') = \frac{h_{n-1}(X, \varepsilon') - h_{n-1}(X, 0)}{\varepsilon'} + 2u_0^2(X)Y_{n-1}(X)$ .  $h_n$  est une fonction de  $\mathfrak{H}$  avec l'hypothèse de récurrence qu'on peut exprimer comme ceci :  $h_n \in \mathfrak{H}$  et  $Z_{n-1} \in \mathfrak{Y}$ . Donc, en résolvant l'équation, on voit à nouveau que  $Z_n(X, \varepsilon')$  est une fonction de  $\mathfrak{Y}$ .

Ce qui suffit à démontrer le théorème.

## 2.4 Estimation de $\alpha^+ - \alpha^-$

### 2.4.1 Préliminaires

**Premiers termes du développement de  $v(u, \varepsilon)$  et  $Y(X, \varepsilon)$**

Le calcul des premiers termes des séries pour  $a$  et  $v$  (cf (2.1)) nous donne :

$$a(\varepsilon) = a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad v(u, \varepsilon) = v_0(u) + \varepsilon v_1(u) + \varepsilon^2 v_2(u) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

où

$$a_1 = -\frac{1}{8} \quad a_2 = -\frac{3}{32}$$

et

$$v_0(u) = \frac{-1}{u+1} \quad v_1(u) = -\frac{1}{8} \frac{u^2 + 4u + 7}{(u+1)^4}$$

$$v_2(u) = -\frac{1}{32} \frac{3u^5 + 21u^4 + 66u^3 + 126u^2 + 159u + 121}{(u+1)^7}$$

Par récurrence, on démontre que pour  $n > 0$  les  $v_n(u)$  sont des fractions rationnelles, dont le numérateur est un polynôme de degré  $3n-1$ , et dont le dénominateur est  $(u+1)^{3n+1}$ .

Le simple changement de variable  $u = -1 + \varepsilon^{1/3}X$  dans le développement de  $v(u, \varepsilon)$  nous donne alors, après simplification :

$$\begin{aligned} \varepsilon^{1/3}v = & -\frac{1}{X} - \frac{1}{2X^4} - \frac{5}{4X^7} - \varepsilon^{1/3} \left( \frac{1}{4X^3} + \frac{9}{8X^6} \right) - \varepsilon^{2/3} \left( \frac{1}{8X^2} + \frac{3}{4X^5} \right) \\ & - \varepsilon \frac{3}{8X^4} - \varepsilon^{4/3} \frac{3}{16X^3} - \varepsilon^{5/3} \frac{3}{32X^2} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{|X|^8} + |\varepsilon| \frac{1}{|X|^5} + |\varepsilon|^2 \frac{1}{|X|^2} \right). \end{aligned}$$

Ensuite, comme  $Y(X, \varepsilon) = \varepsilon^{1/3}v$  se met sous la forme

$$Y = Y_0 + \varepsilon^{1/3}Y_1 + \dots + Y_n\varepsilon^{n/3} + o(\varepsilon^{n/3}),$$

après identification, on trouve pour les  $Y_n$  :

$$\begin{aligned}
Y_0 &= -\frac{1}{X} - \frac{1}{2X^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^7}\right) \\
Y_1 &= -\frac{1}{4X^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^6}\right) \\
Y_2 &= -\frac{1}{8X^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^5}\right) \\
Y_3 &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^4}\right) \\
&\text{et pour } n \geq 4, \text{ on a} \\
Y_n &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^2}\right) \text{ ou } Y_n = o\left(\frac{1}{X^2}\right).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

**Équivalent de  $Y_0^+ - Y_0^-$**

On introduit les fonctions suivantes :

$$\text{Ai}_0 = \text{Ai}, \quad \text{Ai}_1 : x \mapsto \text{Ai}(jx), \quad \text{Ai}_2 : x \mapsto \text{Ai}(j^2x).$$

On cherche à estimer la différence de deux des solutions de (2.2). Pour cela, nous nous intéressons aux deux fonctions suivantes :

$$X_1(z) = -2 \frac{\text{Ai}'_1(z)}{\text{Ai}_1(z)} \quad \text{et} \quad X_2(z) = -2 \frac{\text{Ai}'_2(z)}{\text{Ai}_2(z)}$$

Ces deux fonctions vérifient, à cause de la symétrie par rapport à l'axe réel de l'équation (2.3), la relation  $X_1(z) = \overline{X_2(\bar{z})}$ . Elles correspondent à deux solutions de l'équation (2.2) :

$$Y_0^+(X) = X_2^2(z(X)) + z(X) \quad \text{et} \quad Y_0^-(X) = X_1^2(z(X)) + z(X).$$

En particulier, pour  $X_1(z)$  sur l'axe réel, on a :

$$\begin{aligned}
X &:= X_1(z) = X_1\left(Y_0^-(X_1(z)) - X_1^2(z)\right) = X_1\left(Y_0^-(X) - X^2\right) \\
&= X_2(\bar{z}) = X_2\left(\overline{Y_0^-(X) - X^2}\right) = X_2\left(Y_0^+(X) - X^2\right).
\end{aligned}$$

On note dans ce cas

$$z^+(X) = Y_0^+(X) - X^2 \quad \text{et} \quad z^-(X) = Y_0^-(X) - X^2$$

On cherche un équivalent de  $Y_0^+ - Y_0^-$ , et nous allons montrer le résultat suivant :

**Lemme 6** *Pour  $X$  sur l'axe réel,*

$$(Y_0^+ - Y_0^-)(X) \underset{X \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4}{e} X^2 e^{-\frac{2}{3}X^3} i.$$

Ce qui revient à réussir à calculer exactement un coefficient de Stokes pour une équation différentielle non linéaire ; dans le cas général, ce n'est pas possible.

Pour obtenir ce résultat, on utilise le fait que pour  $X$  réel et suffisamment grand,  $Y_0^\pm - X^2$  est presque un réel négatif. Dans ce cas  $|\text{Ai}_k(Y_0^\pm - X^2)|$  est grand pour  $k = 1$  et  $k = 2$ , exponentiellement petit par contre pour  $k = 0$ , ce qui justifie l'utilisation d'un développement limité pour estimer les deux fonctions  $\text{Ai}_2(z) = -j^2 \text{Ai}_1(z) - j \text{Ai}_0(z)$  et  $\text{Ai}'_2(z) = -j^2 \text{Ai}'_1(z) - j \text{Ai}'_0(z)$ . Dans le calcul qui suit, on travaillera en variable  $X$ , avec aussi les fonctions  $z^\pm(X)$  introduites plus haut.

$$\begin{aligned} X_1(Y_0^-(X) - X^2) &= X_2(Y_0^+(X) - X^2) \\ -2 \frac{\text{Ai}'_1(z^-)}{\text{Ai}_1(z^-)} &= -2 \frac{\text{Ai}'_2(z^+)}{\text{Ai}_2(z^+)} \\ -2 \frac{\text{Ai}'_1(z^-)}{\text{Ai}_1(z^-)} &= -2 \frac{\text{Ai}'_1(z^+) + j^2 \text{Ai}'_0(z^+)}{\text{Ai}_1(z^+) + j^2 \text{Ai}_0(z^+)} \\ X_1(z^-) &= X_1(z^+) \left( 1 + j^2 \frac{\text{Ai}'_0(z^+)}{\text{Ai}'_1(z^+)} - j^2 \frac{\text{Ai}_0(z^+)}{\text{Ai}_1(z^+)} + o(\dots) \right) \\ X_1(z^-) - X_1(z^+) &= X_1(z^+) \left( j^2 \frac{\text{Ai}'_0(z^+)}{\text{Ai}'_1(z^+)} - j^2 \frac{\text{Ai}_0(z^+)}{\text{Ai}_1(z^+)} + o(\dots) \right) \end{aligned}$$

Il va être possible de calculer un équivalent de cette différence, ce qui nous mènera à un équivalent pour  $Y_0^+ - Y_0^-$ . En effet, avec une formule de Taylor

$$X_1(z^-) - X_1(z^+) \sim (z^- - z^+) X'_1(z^-) = (Y_0^- - Y_0^+) X'_1(z^-)$$

sachant que d'après l'équation différentielle pour  $X_1$ , on peut écrire sa dérivée

$$\begin{aligned} X'_1(z^-) &= \frac{X_1^2(z^-) + z^-}{2} \\ X'_1(z^-(X)) &= \frac{X^2 + (Y_0^-(X) - X^2)}{2} \sim -\frac{1}{2X}. \end{aligned}$$

Nous allons utiliser les équivalents déjà vus précédemment (cf (2.4)) pour estimer les deux fractions  $\frac{\text{Ai}'_0(z^+)}{\text{Ai}'_1(z^+)}$  et  $\frac{\text{Ai}_0(z^+)}{\text{Ai}_1(z^+)}$ , puisque  $z^\pm$  est proche du demi-axe

réel négatif quand  $X \rightarrow \infty$  :

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{2}{3} (\mu (X^2 - Y_0(X)))^{3/2} = \frac{2}{3} (2^{-2/3})^{3/2} \left( X^2 + \frac{1}{X} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^4}\right) \right)^{3/2} \\ &= \frac{1}{3} \left( X^3 + \frac{3}{2} + o(1) \right) \\ \xi_2 &= \frac{2}{3} (j\mu (X^2 - Y_0(X)))^{3/2} = e^{i\pi} \xi = -\xi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\text{Ai}'_0(z^+)}{\text{Ai}'_1(z^+)} - \frac{\text{Ai}_0(z^+)}{\text{Ai}_1(z^+)} &\sim \frac{-e^{-\xi} z^{1/4}}{1} \times \frac{1}{-j(jz)^{1/4} e^\xi} - \frac{e^{-\xi}}{z^{1/4}} \times \frac{(jz)^{1/4}}{e^\xi} \\ &\sim e^{-5i\pi/6} e^{-2\xi} + e^{-5i\pi/6} e^{-2\xi} \\ &\sim 2e^{-5i\pi/6} e^{-2\xi}\end{aligned}$$

En rappelant que

$$(Y_0^+ - Y_0^-) X_1'(z^-) \sim -X_1(z^+) j^2 \left( \frac{\text{Ai}'_0(z^+)}{\text{Ai}'_1(z^+)} - \frac{\text{Ai}_0(z^+)}{\text{Ai}_1(z^+)} \right)$$

on trouve comme équivalent pour la différence le résultat annoncé au lemme 6 :

$$(Y_0^+ - Y_0^-)(X) \sim \frac{4}{e} X^2 e^{-\frac{2}{3} X^3} i \quad \text{quand } X \rightarrow \infty \text{ dans } \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

#### 2.4.2 Établissement de l'équation vérifiée par $\alpha^+ - \alpha^-$

On rappelle l'équation (E), vérifiée pour  $(v, \alpha) = (v^+, \alpha^+)$  et  $(v^-, \alpha^-)$ .

$$(E) \quad \varepsilon \frac{dv}{du} = (1 - u^2) + \frac{\alpha - u}{v}.$$

Le but des paragraphes à venir va être d'obtenir une estimation de  $\alpha^+ - \alpha^-$ . Pour cela, on commence par chercher une équation différentielle en  $v^+ - v^-$ , où le terme à calculer sera présent. On pose alors

$$\begin{aligned}b &= \alpha^+ - \alpha^- & c &= \alpha^+ + \alpha^- \\ d &= v^+ - v^- & e &= v^+ + v^-\end{aligned}$$

Quand on effectue la substitution dans l'équation (E), on obtient

$$\begin{aligned}
\varepsilon d' &= (1 - u^2) + \frac{\alpha^+ - u}{v^+} - (1 - u^2) - \frac{\alpha^- - u}{v^-} \\
&= \frac{ud + \alpha^+ v^- - \alpha^- v^+}{v^+ v^-} \\
&= \frac{u}{v^+ v^-} d + \frac{\frac{b+c}{2} \cdot \frac{e-d}{2} + \frac{b-c}{2} \cdot \frac{e+d}{2}}{v^+ v^-} \\
&= \frac{u}{v^+ v^-} d + \frac{e}{2v^+ v^-} b - \frac{c}{2v^+ v^-} d \\
&= \frac{u - c/2}{v^+ v^-} d + \frac{v^+ + v^-}{2v^+ v^-} b
\end{aligned}$$

En remplaçant  $c = \alpha^+ + \alpha^- = 1 + a^+ + 1 + a^-$ , on obtient en définitive l'équation voulue.

**Lemme 7** *On pose  $d(u) = v^+(u) - v^-(u)$  et  $b = \alpha^+ - \alpha^-$ . Alors l'équation différentielle suivante est vérifiée :*

$$\varepsilon d'(u) = f(u)d(u) + g(u)b$$

avec

$$f(u) = \frac{u - 1 - a}{v^+ v^-} \quad \text{et} \quad g(u) = \frac{v^+ + v^-}{2v^+ v^-}$$

sachant que

$$a = \frac{a^+ + a^-}{2} = -\frac{1}{8} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

(toutes les fonctions ici dépendent aussi de  $\varepsilon$ , cette dépendance n'est pas rappelée).

On intègre ensuite cette équation différentielle avec la méthode de la variation de la constante, entre  $+\infty$  et  $x$  (car  $\lim_{+\infty} d = 0$ ) :

$$d(x) = \frac{b}{\varepsilon} e^{F(x)/\varepsilon} \int_{+\infty}^x e^{-F(u)/\varepsilon} g(u) du,$$

où

$$F(t) = \int_1^t f(u) du.$$

Le choix de  $x = x_l = -1 + X_l \varepsilon^{1/3}$  permet de trouver que

$$b = \varepsilon d(x_l) e^{-F(x_l)/\varepsilon} \frac{1}{\int_{+\infty}^{x_l} e^{-F(u)/\varepsilon} g(u) du}. \quad (2.12)$$

### 2.4.3 Calcul de l'équivalent pour $b$

On peut trouver une estimation, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , de chacun des facteurs dans le produit de l'égalité (2.12); le but final étant d'en obtenir une pour  $b$ .

Tout d'abord, on a vu que jusqu'au point  $u = x_l$ , on pouvait affirmer que la fonction  $v^+(u) = \varepsilon^{-1/3} Y^+(\varepsilon^{-1/3}(1+u))$  était équivalente à  $\varepsilon^{-1/3} Y_0^+(\varepsilon^{-1/3}(1+u))$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ce qui nous mène à

$$d(x_l) = v^+(x_l) - v^-(x_l) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \varepsilon^{-1/3} \left( Y_0^+(X_l) - Y_0^-(X_l) \right). \quad (2.13)$$

Ensuite, l'intégrale présente dans (2.12) est susceptible d'être estimée avec la méthode du point col. On constate d'abord que

$$F'(t) = f(t) = 0 \implies t = 1 + a = \alpha.$$

Or on vérifie sans difficulté que  $F(\alpha) = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ . D'où

$$\frac{F(t)}{\varepsilon} = \mathcal{O}(\varepsilon) + \frac{(t - \alpha)^2}{2\varepsilon} f'(\alpha) + \frac{\mathcal{O}(t - \alpha)^3}{\varepsilon}.$$

Sachant que  $v^\pm(\alpha) = -\frac{1}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon)$ , on trouve

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \frac{1}{v^+(\alpha)v^-(\alpha)} - (v^+v^-)'(\alpha) \frac{\alpha - 1 - a}{(v^+(\alpha)v^-(\alpha))^2} \\ &= \left( \frac{1}{(-1/2)^2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + 0 \\ &= 4 + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned}$$

donc

$$\frac{F(t)}{\varepsilon} = \frac{2(t - \alpha)^2}{\varepsilon} + \frac{\mathcal{O}(|t - \alpha|^3 + |\varepsilon| \cdot |t - \alpha|^2)}{\varepsilon}$$

Par ailleurs

$$g(\alpha) \sim -2.$$



La contribution principale dans l'intégrale vient du voisinage de  $\alpha$ , on va donc écrire, après le changement de variable  $x = (t - \alpha)\sqrt{2/\varepsilon}$ ,

$$\begin{aligned} - \int_{x_l}^{+\infty} g(t) e^{-F(t)/\varepsilon} dt &\sim - \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \int_{(x_l - \alpha)\sqrt{2/\varepsilon}}^{+\infty} g\left(\alpha + x\sqrt{\varepsilon/2}\right) e^{-F\left(\alpha + x\sqrt{\varepsilon/2}\right)/\varepsilon} dx \\ &\sim - \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} g(\alpha) \int_{(-2)\sqrt{2/\varepsilon}}^{+\infty} e^{-x^2 + \sqrt{\varepsilon} \cdot \mathcal{O}(|x|^3 + \sqrt{|\varepsilon|} \cdot |x|^2)} dx \\ &\sim 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Un équivalent de l'intégrale est donc :

$$- \int_{x_l}^{+\infty} g(t) e^{-F(t)/\varepsilon} dt \sim \sqrt{2\pi\varepsilon}. \quad (2.14)$$

Il reste à trouver une estimation pour  $F(x_l)$ . Pour calculer  $F(x_l)$ , on peut couper l'intervalle  $[x_l, 1]$  en deux parties, en un point  $(-1 + \lambda)$ , où  $\lambda$  est un réel fixé à choisir entre 0 et 2. À gauche, on pourra alors raisonnablement estimer  $v(u)$  par l'expression  $\varepsilon^{-1/3}(Y_0(X) + \varepsilon^{1/3}Y_1(X) + \varepsilon^{2/3}Y_2(X) + \mathcal{O}(\varepsilon))$  d'après le corollaire 5, et à droite par  $v_0 + \varepsilon v_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ .

$$\frac{1}{\varepsilon} F(x_l) = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} \int_1^{-1+\lambda} \frac{u-1-a}{v^+(u)v^-(u)} du}_{(A)} + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} \int_{-1+\lambda}^{x_l} \frac{u-1-a}{v^+(u)v^-(u)} du}_{(B)}$$

Les calculs des premières fonctions  $v_n$  et les approximations pour les  $Y_n$  (cf. (2.10)) données dans les préliminaires permettent de donner une estimation des deux intégrales. Pour l'expression (A), on part de

$$\frac{1}{v^+(u)v^-(u)} = (u+1)^2 \left( 1 - \frac{\varepsilon}{4} \frac{u^2 + 4u + 7}{(u+1)^3} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

puisque  $v^+$  et  $v^-$  ont le même développement asymptotique, d'où

$$\begin{aligned} (A) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_1^{-1+\lambda} \frac{u-1-a}{v^+(u)v^-(u)} du \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_1^{-1+\lambda} (u-1-a)(u+1)^2 du - \frac{1}{4} \int_1^{-1+\lambda} (u-1-a) \frac{u^2 + 4u + 7}{u+1} du + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

On rappelle que  $a = -\varepsilon/8 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ . Le calcul des intégrales nous donne alors

$$(A) = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{4}{3} - \frac{2\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^4}{4} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{\lambda^3}{24} + 2\ln \lambda - 2\ln(2) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Pour (B), le calcul se révèle plus complexe. On sait que chacune des deux fonctions  $v^+$  et  $v^-$  se prolonge à l'aide d'une fonction du type  $Y_\varepsilon$  du théorème 4 :

$$v^\pm(u, \varepsilon) = \varepsilon^{-1/3} Y_\varepsilon^\pm \left( \frac{u}{\varepsilon'} \right)$$

avec  $X = u/\varepsilon'$ , en utilisant le corollaire 5,

$$v^\pm(u, \varepsilon) = \varepsilon^{-1/3} \left( Y_0^\pm(X) + \varepsilon^{1/3} Y_1^\pm(X) + \varepsilon^{2/3} Y_2^\pm(X) + \varepsilon Y_3^\pm(X) + \frac{\varepsilon^{4/3}}{X} \mathcal{O}_\varepsilon(1) \right)$$

où le  $\mathcal{O}_\varepsilon(1)$  est borné quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  et au moins borné quand  $X \rightarrow \infty$ .

Comme  $v^+$  et  $v^-$  ont le même développement asymptotique pour tout  $u > \rho$  dans un certain secteur autour de l'axe réel, il est clair que le développement en  $1/X$  des  $Y_n$  donné plus haut est valable pour  $Y_n^+$  comme pour  $Y_n^-$ . Ces deux fonctions sont donc exponentiellement proches en  $1/X$  quand  $X$  devient grand. On peut donc écrire,

$$\begin{aligned} (B) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{-1+\lambda}^{x_l} \frac{u-1-a}{v^+(u)v^-(u)} du \\ &= \int_{\lambda\varepsilon^{-1/3}}^{X_l} \frac{-2 + \varepsilon^{1/3}X - a}{Y_0^+(X)Y_0^-(X)} \left( 1 - \varepsilon^{1/3}Q_1(X) + \varepsilon^{2/3}Q_2(X) + R(X, \varepsilon) \right) dX, \end{aligned}$$

en notant

$$Q_1 = \frac{Y_1^+}{Y_0^+} + \frac{Y_1^-}{Y_0^-}, \quad Q_2 = \frac{Y_1^{+2}}{Y_0^{+2}} + \frac{Y_1^+Y_1^-}{Y_0^+Y_0^-} + \frac{Y_1^{-2}}{Y_0^{-2}} - \frac{Y_2^+}{Y_0^+} - \frac{Y_2^-}{Y_0^-};$$

le reste  $R(X, \varepsilon)$  se trouve être de la forme  $\left( \frac{\varepsilon}{X} + \varepsilon^{4/3} \right) \mathcal{O}_\varepsilon(1)$ , puisqu'il correspond à des termes  $\varepsilon \frac{Y_k^\pm}{Y_0^\pm}$  ( $1 \leq k \leq 3$ ) et  $\frac{\varepsilon^{4/3}}{X} \frac{1}{Y_0^\pm}$  respectivement équivalents quand  $X$  devient grand à  $\frac{\varepsilon}{X}$  et  $\varepsilon^{4/3}$ .

$$\begin{aligned} (B) &= \int_{\lambda\varepsilon^{-1/3}}^{X_l} \frac{-2 + \varepsilon^{1/3}X - a}{Y_0^+(X)Y_0^-(X)} dX - \varepsilon^{1/3} \int_{\lambda\varepsilon^{-1/3}}^{X_l} \frac{-2 + \varepsilon^{1/3}X - a}{Y_0^+Y_0^-} Q_1 dX \\ &\quad + \varepsilon^{2/3} \int_{\lambda\varepsilon^{-1/3}}^{X_l} \frac{-2 + \varepsilon^{1/3}X - a}{Y_0^+Y_0^-} Q_2 dX + \int_{\lambda\varepsilon^{-1/3}}^{X_l} \frac{(-2 + \varepsilon^{1/3}X - a)R(X, \varepsilon)}{Y_0^+Y_0^-} dX \end{aligned}$$

On appellera les quatre intégrales précédentes, dans l'ordre,  $(I)$ ,  $(II)$ ,  $(III)$  et  $(IV)$ .

Pour  $(I)$ , regardons d'abord  $\int_{\lambda\varepsilon^{-1/3}}^{X_l} \frac{-2}{Y_0^+ Y_0^-} dX$ . D'après l'équation différentielle (2.2) vérifiée par  $Y_0$ , on a

$$(Y_0^+ - Y_0^-)'(X) = \frac{-2}{Y_0^+(X)Y_0^-(X)}(Y_0^+ - Y_0^-)(X)$$

$$\implies (Y_0^+ - Y_0^-)(X) = (Y_0^+ - Y_0^-)(0)e^{\int_0^X \frac{-2}{Y_0^+ Y_0^-} dX} \quad (\text{en intégrant l'équation}).$$

Or, quand  $X \longrightarrow \infty$ , on a vu avec (2.11) que

$$(Y_0^+ - Y_0^-)(X) \sim \frac{4}{e} i X^2 e^{-\frac{2}{3} X^3},$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{\lambda\varepsilon^{-1/3}}^{X_l} \frac{-2}{Y_0^+ Y_0^-} dX &= \ln\left(\frac{(Y_0^+ - Y_0^-)(X_l)}{i}\right) - \ln\left(\frac{(Y_0^+ - Y_0^-)(\lambda\varepsilon^{-1/3})}{i}\right) \\ &= \ln(-i(Y_0^+ - Y_0^-)(X_l)) + 1 - 2 \ln 2 + \frac{2\lambda^3}{3\varepsilon} - 2 \ln(\lambda\varepsilon^{-1/3}) + o(1) \\ &= \ln(-i(Y_0^+ - Y_0^-)(X_l)) + \frac{2\lambda^3}{3} \frac{1}{\varepsilon} + \frac{2}{3} \ln \varepsilon - 2 \ln 2\lambda + 1 + o(1). \end{aligned}$$

Pour tous les termes à venir (y compris pour les autres intégrales), l'intégration au voisinage de  $X_l$  et de tout point fini ne donne au final que du  $o(\varepsilon)$ , et il n'y a donc que ce qui se passe quand  $X \rightarrow \infty$  qui nous intéresse. Autrement dit, la différence entre  $Y_n^\pm$  et son développement en  $1/X$  est négligée. Ainsi, pour  $\int_{\lambda\varepsilon^{-1/3}}^{X_l} \frac{\varepsilon^{1/3} X}{Y_0^+ Y_0^-} dX$ , on utilise le développement asymptotique de  $Y_0$  :

$$\begin{aligned} Y_0 &= -\frac{1}{X} - \frac{1}{2X^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^7}\right) \implies \frac{1}{Y_0^2} = X^2 - \frac{1}{X} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^4}\right) \\ \int_{\lambda\varepsilon^{-1/3}}^{X_l} \frac{\varepsilon^{1/3} X}{Y_0^+ Y_0^-} dX &= \varepsilon^{1/3} \int_{\lambda\varepsilon^{-1/3}}^{X_l} (X^3 - 1) dX + \mathcal{O}(\varepsilon^{1/3}) \\ &= -\varepsilon^{1/3} \frac{\lambda^4}{4\varepsilon^{4/3}} + \varepsilon^{1/3} \lambda \varepsilon^{-1/3} + \mathcal{O}(\varepsilon^{1/3}) \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\lambda^4}{4} + \lambda + \mathcal{O}(\varepsilon^{1/3}). \end{aligned}$$

Et pour la dernière partie de  $(I)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\lambda\varepsilon^{-1/3}}^{X_l} \frac{a}{Y_0^+ Y_0^-} dX &= -\frac{\varepsilon}{16} \int_{\lambda\varepsilon^{-1/3}}^{X_l} \frac{-2}{Y_0^+ Y_0^-} dX \left(1 + \mathcal{O}(\varepsilon)\right) \\ &= -\frac{\lambda^3}{24} + o(1). \end{aligned}$$

D'où finalement

$$(I) = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{2\lambda^3}{3} - \frac{\lambda^4}{4} \right) + \frac{2}{3} \ln \varepsilon - 2 \ln \lambda - 2 \ln 2 + 1 + \lambda - \frac{\lambda^3}{24} + \ln \left( \frac{(Y_0^+ - Y_0^-)(X_l)}{i} \right) + o(1).$$

On peut procéder de manière tout a fait identique pour (II)

$$(II) = \varepsilon^{1/3} \int_{\lambda \varepsilon^{-1/3}}^{X_l} \frac{-2 + \varepsilon^{1/3} X - a}{Y_0^+ Y_0^-} Q_1(X) dX$$

en utilisant la série asymptotique de  $Y_1$  dans  $Q_1$  et ne négligeant ce qui est en facteur de  $a = \mathcal{O}(\varepsilon)$ .

$$Y_1(X) = -\frac{1}{4X^3} + \mathcal{O}(X^{-6}) \implies -\frac{2Y_1}{Y_0^3} = -\frac{1}{2} + o(1)$$

$$(II) = \varepsilon^{1/3} \int^{\lambda \varepsilon^{-1/3}} \frac{-2 + \varepsilon^{1/3} X}{2} dX + o(1) = \frac{\lambda^2}{4} - \lambda + o(1)$$

Et de même pour (III).

$$(III) = \varepsilon^{2/3} \int_{\lambda \varepsilon^{-1/3}}^{X_l} \frac{(-2 + \varepsilon^{1/3} X)}{Y_0^2} \left( \frac{Y_1^2}{Y_0^2} - 2 \frac{Y_2}{Y_0} \right) dX$$

$$Y_2(X) = -\frac{1}{8X^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^5}\right) \implies -\frac{2Y_2}{Y_0^3} = -\frac{X}{4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^2}\right); \text{ et } \frac{Y_1^2}{Y_0^4} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^2}\right)$$

$$(III) = \varepsilon^{2/3} \int^{\lambda \varepsilon^{-1/3}} (-2 + \varepsilon^{1/3} X) \left( -\frac{X}{4} \right) + o(1) = \frac{\lambda^3}{12} - \frac{\lambda^2}{4} + o(1)$$

Pour la dernière intégrale,

$$(IV) \leq \varepsilon \int_{\lambda \varepsilon^{-1/3}} \frac{-2 + \varepsilon^{1/3} X}{Y_0^2} \left( \frac{1}{X} + \varepsilon^{1/3} \right) \mathcal{O}_\varepsilon(1) dX$$

$$\leq \varepsilon \int_{\lambda \varepsilon^{-1/3}} (\mathcal{O}_\varepsilon(X) + \varepsilon^{1/3} \mathcal{O}_\varepsilon(X^2)) dX$$

$$\leq \varepsilon \mathcal{O}(\varepsilon^{-2/3})$$

$$= o(1)$$

En fin de compte, quand on additionne  $(A) + (I) + (II) + (III) + (IV)$ , on obtient

$$\frac{1}{\varepsilon} F(x_l) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \ln \varepsilon + \frac{4}{3} - 4 \ln 2 + \ln \left( \frac{(Y_0^+ - Y_0^-)(X_l)}{i} \right) + o(1)$$

Donc

$$e^{-F(x_l)/\varepsilon} \sim e^{-4/3\varepsilon} \varepsilon^{-2/3} \frac{16}{e^{4/3}} \frac{i}{(Y_0^+ - Y_0^-)(X_l)} \quad (2.15)$$

### Remarque

On peut signaler que le calcul de  $(A)$  ci-dessus n'est pas indispensable et qu'il suffit de poser  $\lambda = 0$  dans  $(B)$  pour obtenir le bon résultat. Le calcul complet de  $(A)$  a cependant été conservé parce qu'*a priori*, il est indispensable, qu'il peut l'être dans d'autres exemples et parce qu'il permet de détecter d'éventuelles erreurs. Dans l'autre sens, remplacer  $\lambda$  par  $X_l \varepsilon^{1/3}$  dans  $(A)$  ne suffit pas pour obtenir le résultat complet, mais donne déjà les termes  $e^{-4/3\varepsilon} \varepsilon^{-2/3}$ .

On peut en revanche choisir effectivement n'importe quel  $\lambda$  fixé dans  $]0, 2[$ , ou même un  $\lambda$  variant très peu avec  $\varepsilon$  comme par exemple  $\varepsilon^{1/20}$ , on aboutira au bon résultat, avec quelques complications dans le second cas.

En combinant les résultats intermédiaires (2.13), (2.14) et (2.15), cela nous donne finalement :

$$(2.12) \quad b \sim i \varepsilon e^{-4/3\varepsilon} \varepsilon^{-2/3} \frac{16}{e^{4/3}} \frac{\varepsilon^{-1/3} (Y_0^+ - Y_0^-)(X_l)}{(Y_0^+ - Y_0^-)(X_l)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}$$

$$b \sim i \frac{e^{-\frac{4}{3\varepsilon}}}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} e^{4/3}}$$

Soit le

### Théorème 8

$$\alpha^+ - \alpha^- \sim i \frac{e^{-\frac{4}{3\varepsilon}}}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} e^{4/3}}$$

On retrouve le résultat de [7] de la proximité exponentielle des deux  $\alpha$ . Et on confirme que la borne trouvée :  $\exp(R(-1 + \rho)/\varepsilon)$  était bien optimale.

## 2.5 Conséquence sur les coefficients de la série $\hat{a}(\varepsilon)$

D'après [7], la fonction  $a(\varepsilon)$  est holomorphe dans le domaine

$$\mathcal{M} = \left\{ \varepsilon / \arg(\varepsilon) \in \left] \frac{-5\pi}{2} + \delta, \frac{\pi}{2} - \delta \right[ , 0 < |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1| \right\}.$$

Pour  $\varepsilon_0$  assez petit ( $|\varepsilon_0| < |\varepsilon_1|$ ), le chemin  $\gamma$ , défini par un arc de cercle de rayon  $|\varepsilon_0|$  et deux segments proches de  $[0, \varepsilon_0]$  (voir figure 6) est inclu dans  $\mathcal{M}$ , et est rétractile en un point dans ce domaine..

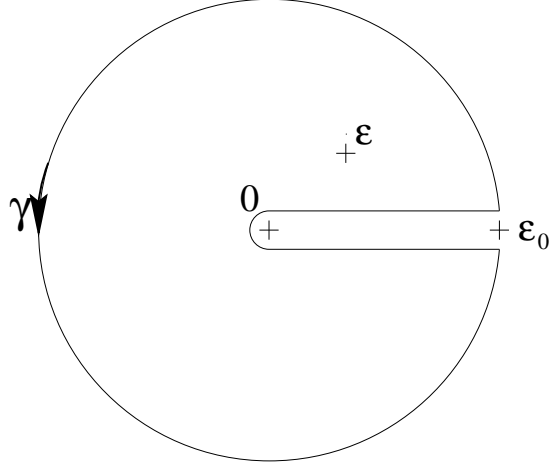


FIG. 6: Chemin d'intégration  $\gamma$ .

Donc pour  $\varepsilon \in \mathcal{M}$ , on a

$$\begin{aligned} a(\varepsilon) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{a(u)}{u - \varepsilon} du \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{|u|=\rho} \frac{a(u)}{u - \varepsilon} du + \frac{1}{2i\pi} \int_0^{\varepsilon_0} \left( \frac{a(ue^{-2i\pi}) - a(u)}{u - \varepsilon} \right) du \end{aligned}$$

puis en développant en série de  $\varepsilon$  et en identifiant les coefficients obtenus

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{|u|=\rho} a(u) u^{-n-1} du + \frac{1}{2i\pi} \int_0^{\varepsilon_0} \left( a(ue^{-2i\pi}) - a(u) \right) u^{-n-1} du$$

comme le premier terme n'est que de l'ordre de  $\rho^{-n}$

$$a_n \sim \frac{1}{2i\pi} \int_0^{\varepsilon_0} \left( a^-(u) - a^+(u) \right) u^{-n-1} du$$

et que dans cette intégrale, la contribution principale vient du voisinage de 0, le théorème 8 mène à

$$a_n \sim -\frac{1}{2i\pi} i \frac{8\sqrt{2}}{e^{4/3}\sqrt{\pi}} \int_0^{\varepsilon_0} \frac{e^{-4/3u}}{\sqrt{u}} u^{-n-1} du.$$

On effectue alors le changement de variable  $t = \frac{4}{3u}$ ,  $du = -\frac{4}{3} \frac{dt}{t^2}$

$$a_n \sim \frac{1}{2\pi} \frac{8\sqrt{2}}{e^{4/3}\sqrt{\pi}} \int_{+\infty}^{4/3\varepsilon_0} e^{-t} t^{n-1} \sqrt{t} dt \times \sqrt{\frac{3}{4}} \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Pour  $n$  assez grand,  $\int_{4/3\varepsilon_0}^0 e^{-t} t^{n-1/2} dt$  est négligeable face à  $\int_{+\infty}^{4/3\varepsilon_0} e^{-t} t^{n-1/2} dt$ .

Donc

$$a_n \sim \frac{-1}{2\pi} \frac{8\sqrt{2}}{e^{4/3}\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{3}{4}} \left(\frac{3}{4}\right)^n \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Or

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n-1/2}{e}\right)^{n-1/2} \sim \sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Donc

$$a_n \sim \frac{-1}{2\pi} \frac{8\sqrt{2}}{e^{4/3}\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{3}{4}} \left(\frac{3}{4}\right)^n \sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

**Théorème 9** *On a un équivalent exact pour les coefficients des  $\alpha$  «à canards» :*

$$a_n \sim \frac{-4\sqrt{3}}{\pi e^{4/3}} \left(\frac{3n}{4e}\right)^n$$

On rappelle que tous les  $\alpha$  donnant des solutions «canards» sont exponentiellement proches en  $\varepsilon$ . Ils ont donc tous le même développement asymptotique. Par ailleurs, le résultat obtenu (à  $\varepsilon$  donné) en sommant la série «au plus petit terme» donne aussi une approximation de  $\alpha$  exponentiellement bonne, et est donc une valeur à canard [7].

## 2.6 Résultats numériques

On peut facilement implémenter le calcul de la suite des  $a_n$  en utilisant les formules de récurrence (2.1). En particulier, en calculant les 155 premiers termes (calcul effectué par Franck Michel et amicalement transmis) et en regardant le résultat de la multiplication  $b_n = a_n \times (4e/3n)^n$ , on obtient :

$b_{135}$	-0,5417512651	$b_{136}$	-0,5418690317	$b_{137}$	-0,5419854885
$b_{138}$	-0,5421006603	$b_{139}$	-0,5422145711	$b_{140}$	-0,5423272443
$b_{141}$	-0,5424387024	$b_{142}$	-0,5425489682	$b_{143}$	-0,5426580621
$b_{144}$	-0,5427660064	$b_{145}$	-0,5428728208	$b_{146}$	-0,5429785257
$b_{147}$	-0,5430831405	$b_{148}$	-0,5431866841	$b_{149}$	-0,5432891757
$b_{150}$	-0,5433906324	$b_{151}$	-0,5434910728	$b_{152}$	-0,5435905137
$b_{153}$	-0,5436889722	$b_{154}$	-0,5437864645	$b_{155}$	-0,5438830066

Si on cherche alors les  $b_n$  sous la forme  $b_n = C + a/\sqrt{n}$  et  $b_n = C + a/\sqrt[3]{n}$ , on obtient (en utilisant une formule de linéarisation aux moindres carrés) :

$$b_n = -0,5736898877 + \frac{0,3710889332}{\sqrt{n}}, \quad b_n = -0,5891153498 + \frac{0,2429519729}{\sqrt[3]{n}}.$$

Et la constante calculée ci-dessus vaut

$$-0,5813148764.$$

On constate donc que la constante calculée est compatible avec les résultats numériques, mais que les termes correctifs du développement des  $a_n$  restent non négligeables.

Il est aussi possible d'estimer directement la valeur de  $b = \alpha^+ - \alpha^- = 2\Im(\alpha^+)$  en cherchant les valeurs numériques de  $\alpha^+$  pour différentes valeurs de  $\varepsilon$ .

On intègre numériquement, pour certains  $\varepsilon$  raisonnablement petits, l'équation différentielle (E), par exemple d'une part le long du chemin comprenant les segments  $[-1+10i, 0]$  puis  $[0, 1]$  et d'autre part le long de  $[9, 1]$ . Ces deux chemins ont la propriété de descendre le relief (cf. fig. 7, et [7]), c'est à dire qu'une erreur dans l'estimation des valeurs initiales (en  $-1+10i$  et en 9) devient exponentiellement petite une fois arrivés en 1 ; on prendra donc les valeurs  $v(-1+10i) = i/10$  et  $v(9) = -1/10$ . De plus, un de ces chemins part de la montagne Nord, l'autre de la montagne Est, et la définition de  $\alpha^+$  est qu'il s'agit de la valeur de  $\alpha$  pour laquelle il existe une solution tendant vers 0 en  $l^\infty$  sur ces deux montagnes (N.B. : on retrouvera la manière de construire les  $\alpha$  dans la partie suivante), ce qui sera vrai si et seulement si les deux  $v(1)$  trouvés sont égaux.



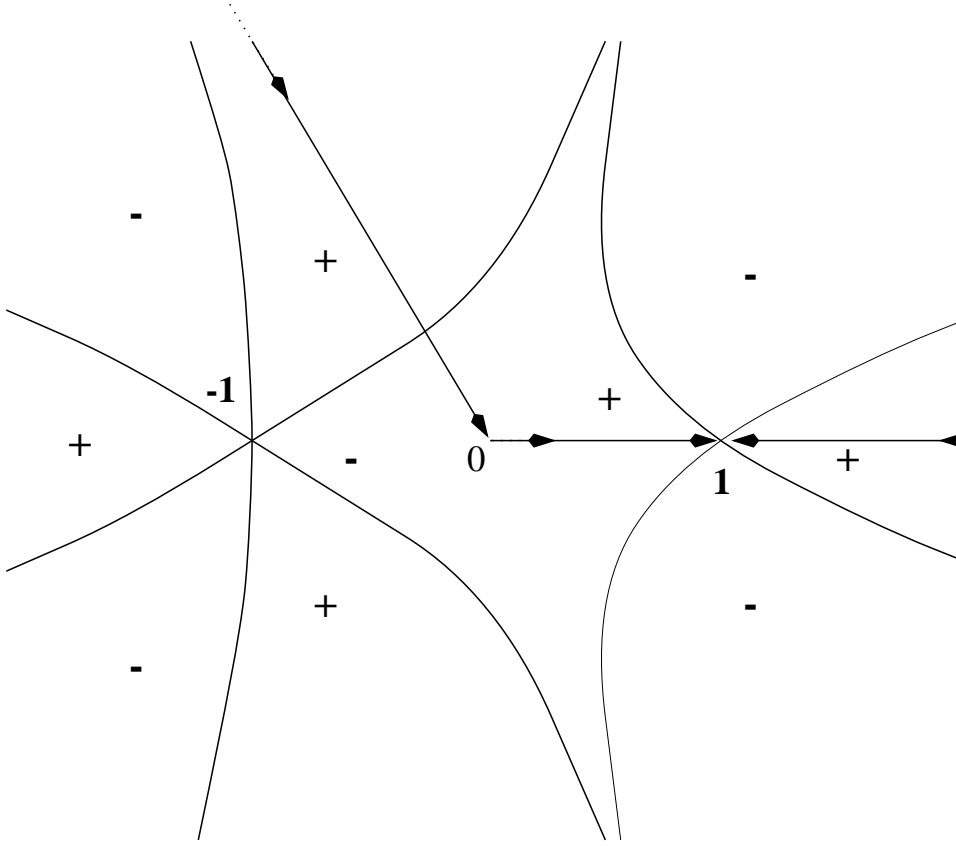


FIG. 7: Relief pour l'équation de Van der Pol, et chemins pour l'intégration numérique

Une recherche numérique de ce type donne les approximations suivantes :

$\varepsilon$	$\alpha^+$	$2\Im(\alpha^+) \times e^{4/3\varepsilon} \sqrt{\varepsilon}$
0,20	$0,9684 + 0,00153i$	1,07
0,17	$0,9733 + 0.00055i$	1,16
0,14	$0,9800 + 0.000120i$	1,23
0,08	$0,9893 + 1,40 \cdot 10^{-7}i$	1,37
0,06	$0,9921 + 6,48 \cdot 10^{-10}i$	1,42
0,05	$0,9935 + 8,5 \cdot 10^{-12}i$	1,44
0,04	$0,9948 + 1,23 \cdot 10^{-14}i$	1,47

Ces résultats sont compatibles avec la valeur de la constante trouvée (égale environ à 1,68), avec des termes correctifs en  $\sqrt{\varepsilon}$  et  $\sqrt[3]{\varepsilon}$ .

## Chapitre 3

# Généralisation

### 3.1 Préliminaires

#### 3.1.1 Rappel : estimation de Cauchy

On rappelle pour les démonstrations à venir la propriété de Cauchy, qu'on utilisera sous la forme suivante :

**Lemme 1** *Soit  $f(x_1, \dots, x_n)$  une fonction holomorphe en  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , bornée pour  $x$  dans l'ouvert  $U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ , et soit  $F_1$  un fermé inclus dans l'ouvert  $U_1$ . Alors*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \text{ est bornée pour } x \in F_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$$

Un corollaire immédiat de ce lemme indique que si ce n'est pas  $f(x)$ , mais  $\frac{f(x)}{g(x_k)}$  qui est bornée, alors la fonction  $\frac{1}{g(x_k)} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$  est bornée elle aussi.

#### 3.1.2 Forme normale pour une équation différentielle

Plutôt que travailler sur une équation écrite sous la forme (E.diff.) vue dans l'introduction :

$$\varepsilon y' = yf(x, \varepsilon) + h(x, \varepsilon) + \varepsilon y^2 P(x, \varepsilon, y)$$

nous allons manipuler dans cette section une équation sous une forme (I) apparemment moins générale :

$$\varepsilon y' = (x^p f(x) + \varepsilon g(x, \varepsilon))y + h(x, \varepsilon) + \varepsilon y^2 P(x, \varepsilon, \varepsilon y). \quad (\text{I})$$

En fait, on se ramène facilement à une équation de ce type.

Soit l'équation

$$\varepsilon u' = \Psi(x, u(x), \varepsilon),$$

où on demande juste que  $\Psi$  soit holomorphe en  $x$ , méromorphe en  $u$  et qu'elle admette un développement asymptotique en  $\varepsilon$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0. On suppose aussi qu'il existe une courbe lente  $u_0(x)$ , telle que  $\Psi(x, u_0(x), 0) = 0$ .

On pose  $u(x) = u_0(x) + \varepsilon y(x)$ , ou, ce qui donne souvent un résultat plus agréable à manipuler,  $u(x) = u_0(x)(1 + \varepsilon y(x))$ , et on linéarise l'équation en  $y$ .

$$\varepsilon u' = \Psi(x, u, \varepsilon),$$

donne, en regroupant dans  $\psi_0$  et  $\psi_1$  tout ce qui est linéaire en  $u$ , et dans le dernier terme tout ce qui contient un pôle en  $u = 0$ ,

$$= \psi_0(x, \varepsilon) + u\psi_1(x, \varepsilon) + u^2\psi_2(x, \varepsilon, u) + \frac{1}{u^k}\psi_3(x, \varepsilon, u)$$

On écrit alors  $u = u_0(1 + \varepsilon y)$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon u'_0(1 + \varepsilon y(x)) + \varepsilon^2 u_0 y' &= \psi_0 + u_0 \psi_1 + \varepsilon u_0 y \\ &+ u_0^2 \psi_2 + u_0^2 (2\varepsilon y + \varepsilon^2 y^2) \psi_2(x, \varepsilon, u_0(1 + \varepsilon y)) + \frac{1}{u_0^k (1 + \varepsilon y)^k} \psi_3(x, \varepsilon, u_0(1 + \varepsilon y)) \end{aligned}$$

Comme  $u_0$  est courbe lente, les termes de degré 0 en  $\varepsilon$  s'éliminent ; on divise alors par  $\varepsilon$ , puis on linéarise autour de  $y = 0$  : les termes en  $y^k$ ,  $k > 0$  ont donc comme facteur un terme  $\frac{\varepsilon^k}{\varepsilon}$ , ce qui donne bien en particulier, pour  $k \geq 2$ ,  $\varepsilon y^2 P(x, \varepsilon, \varepsilon y)$ . On obtient donc bien une équation du type annoncé ci-dessus, sachant que les fonctions  $f$ ,  $g$ ,  $h$  et  $P$  contiennent éventuellement des termes avec des facteurs en  $\frac{1}{u_0^{k+1}}$ .

Ainsi, dans l'exemple de l'équation de Van der Pol (E), cette procédure de normalisation nous donne :

$$\begin{aligned} \varepsilon v \frac{dv}{du} &= (1 - u^2)v + \alpha - u \\ \varepsilon \frac{dv}{du} &= (1 - u^2) + \frac{1 + a(\varepsilon) - u}{v}. \end{aligned}$$

Puis en posant  $v = v_0(1 + \varepsilon y)$ ,  $v_0$  étant égal à  $\frac{-1}{u+1}$ ,

$$\begin{aligned}
\varepsilon (v_0(1 + \varepsilon y))' &= 1 - u^2 + \frac{1 + a - u}{v_0(1 + \varepsilon y)}, \\
\varepsilon v_0(\varepsilon y') &= 1 - u^2 + \frac{1 + a - u}{v_0} \left( 1 - \varepsilon y + \frac{\varepsilon^2 y^2}{1 + \varepsilon y} \right) - \varepsilon v_0'(1 + \varepsilon y), \\
\left( -\frac{\varepsilon}{1 + u} \right) \varepsilon y' &= (1 - u^2) \left( \varepsilon y - \frac{\varepsilon^2 y^2}{1 + \varepsilon y} \right) - a(1 + u) \left( 1 - \varepsilon y + \frac{\varepsilon^2 y^2}{1 + \varepsilon y} \right) \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{(1 + u)^2} (1 + \varepsilon y), \\
\varepsilon y' &= y \left( -(1 - u)(1 + u)^2 + \varepsilon \left( \frac{a}{\varepsilon} (1 + u)^2 - \frac{1}{1 + u} \right) \right) \\
&\quad + \frac{a}{\varepsilon} (1 + u)^2 - \frac{1}{1 + u} + \varepsilon y^2 \frac{1}{1 + \varepsilon y} ((1 - u)(1 + u)^2 + a(1 + u)^2).
\end{aligned}$$

Pour cette équation, l'étude a été faite au voisinage des deux points cols du relief construit à partir de  $-(1 - u)(1 + u)^2$  : autour de  $u = 1$ , dont on a montré qu'il n'était pas un point tournant dans certains cas ([7]) ; et au voisinage de  $-1$ , au chapitre 2. Ce sont ces deux études que l'on souhaite généraliser ici.

### 3.2 Existence de solutions d'une équation différentielle près d'un point tournant

Dans les paragraphes 3.2.1 et 3.2.2, nous allons généraliser le théorème 4 qui a été démontré dans le cas de l'équation de Van der Pol, au cas suivant :

$$\varepsilon y' = (x^p f(x) + \varepsilon g(x, \varepsilon))y + h(x, \varepsilon) + \varepsilon y^2 P(x, \varepsilon, \varepsilon y). \quad (\text{I})$$

Il est clair que 0 est un point col pour le relief  $\Re \left( \int^x t^p f(t) dt \right)$  correspondant, et c'est donc en général un point tournant pour l'équation différentielle. On veut étudier le comportement des solutions de cette équation au voisinage de ce point. Le but va être de démontrer que si on a les bonnes hypothèses sur les fonctions intervenant dans l'équation, on a l'existence d'une vraie solution bornée, d'abord pour des  $x$  tels que  $|x| > \rho$ , où  $\rho > 0$  est une constante quelconque fixée indépendante de  $\varepsilon$  (résultat classique, redémontré au paragraphe 3.2.1 ci-dessous, pour  $\varepsilon$  assez petit). Ensuite, que cette solution peut bien souvent être prolongée dans des domaines de la même forme, mais avec un  $\rho$  tendant cette fois vers 0 avec  $\varepsilon : |x| > \rho(\varepsilon) = X_l \varepsilon^r$  ( $X_l$  constante assez grande, mais indépendante de  $\varepsilon$ , et  $r$  un rationnel strictement positif donné). Ce deuxième résultat sera démontré dans un second temps, dans le paragraphe 3.2.2, et on verra que si la solution

prolongée n'est pas nécessairement bornée (quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) dans tout son domaine d'existence, sa croissance reste contrôlée et n'est pas, en tous cas, exponentielle.

Chacun de ces deux résultats ne sera en général vrai que dans certains domaines déterminés non seulement par la norme de  $x$ , mais aussi par le relief ; de fait, ces domaines correspondront à peu près à des secteurs centrés en 0, avec des  $x$  vérifiant la condition donnée ci-dessus :  $|x| > \rho(\varepsilon)$ .

### 3.2.1 Existence d'une solution à l'infini de 0

On se fixe donc une constante  $\rho$  positive, arbitrairement petite.

On suppose qu'on a, pour l'équation (I), les hypothèses (H●) suivantes :

- $f$  est holomorphe dans  $\mathcal{D}_0$ , où  $\mathcal{D}_0$  est un domaine ouvert, fini ou infini, contenant 0, et  $f$  ne s'annule pas sur  $\mathcal{D}_0$ .
- $g, h$  et  $P$  sont holomorphes en  $x$  sur  $\mathcal{D}_0$ , sauf éventuellement en 0 où  $g$  ou  $h$  peuvent n'être que méromorphes et avoir un pôle.
- $g, h$  et  $P$  sont holomorphes en  $\varepsilon$  dans des secteurs ouverts  $S_0$ , centrés en 0, et bornées pour tout  $x \in \mathcal{D}_0$  fixé quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  : on suppose qu'il existe  $q$  tel que les fonctions  $P, x^q g(x, \varepsilon)$  et  $x^q h(x, \varepsilon)$  ont un développement asymptotique en  $\varepsilon$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0.
- $P$  est holomorphe en  $\varepsilon y$  dans un voisinage de 0.
- On pose  $F(t) = \int^t (u^p f(u)) du$  et  $R(t) = \Re \left( \frac{F(t)|\varepsilon|}{\varepsilon} \right)$ . On considérera à  $\theta = \arg \varepsilon$  fixé un domaine **fermé**  $\mathcal{D}_\theta \subset \mathcal{D}_0$ , tel que  $\mathcal{D}_\theta$  soit accessible à partir d'un sommet  $s_\theta$ , qui est soit infini, soit dans  $\mathcal{D}_0 \setminus \mathcal{D}_\varepsilon$  avec le relief  $R(t)$ , et tel que  $\forall x \in \mathcal{D}, |x| \geq \rho$  ; on reprendra, pour ce qui concerne l'accessibilité, les notations de la définition 1. Les domaines  $\mathcal{D}_\varepsilon$  peuvent être non bornés, si  $\mathcal{D}_0$  l'est.

L'équation (I) a une solution formelle  $\hat{y}(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \varepsilon^n$  pour  $|x| > \rho$ , dont tous les coefficients  $y_n(x)$  sont holomorphes en  $x$ . Cela se vérifie en remplaçant dans l'équation  $y$  par cette série et en identifiant les coefficients de  $\varepsilon^n$  : on trouve alors des relations de récurrence donnant  $y_n$  en fonction des  $y_p$  et de leurs dérivées (pour  $p < n$ ). La première relation, obtenue en posant  $\varepsilon = 0$  donne

$$y_0(x) = -\frac{h(x, 0)}{x^p f(x)}$$

Nous allons démontrer le théorème suivant :

**Théorème 10** *On suppose que pour l'équation (I), les hypothèses (H●) sont vérifiées et que les fonctions*

$$\frac{1}{x^p f(x)}, \frac{1}{x^p f(x)} \sup_{|y| \leq \delta} (P(x, \varepsilon, \varepsilon y)), \frac{g(x, \varepsilon)}{x^p f(x)} \text{ et } \frac{h(x, \varepsilon)}{x^p f(x)}$$

sont bornées<sup>†</sup> pour un certain  $\delta$ ,  $x \in \mathcal{D}_0$ ,  $|x| > r$  ( $r$  constante arbitrairement petite) et  $\varepsilon \in S_0$ ,  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ . On fait varier  $\varepsilon$  dans un secteur  $S_0$  d'ouverture arbitrairement petite.

Alors, pour tout réel positif  $\rho > r$ , il existe un domaine fermé éventuellement non borné  $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_0$ , de la forme

$$\mathcal{D} = \bigcap_{\varepsilon \in S_0} \left\{ x \in \mathbb{C} \mid |x| \geq \rho, x \text{ accessible d'un sommet } s_\varepsilon \text{ avec le relief } \Re \frac{F(x)|\varepsilon|}{\varepsilon} \right\}$$

et une solution  $y(x, \varepsilon)$  de (I) existant pour  $x \in \mathcal{D}$  qui soit bornée indépendamment de  $|\varepsilon|$  sur ce domaine. Cette fonction  $y(x, \varepsilon)$  tend vers la fonction  $y_0(x)$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0 dans  $S_0$ , uniformément pour  $x \in \mathcal{D}$ .

Quelques remarques sur les hypothèses de ce théorème :

1. L'hypothèse  $1/(x^p f(x))$  bornée implique bien entendu que  $f$  ne s'annule pas sur  $\mathcal{D}$ .
2. Comme il existe un  $\lambda_\rho$  tel que  $\lambda_\rho |u^p f(u)| \geq |g(u, \varepsilon)|$ ,  $\forall u \in \mathcal{D}$  et  $\varepsilon$  assez petit, cela signifie que le (vrai) relief correspondant à  $\Re \left( \int^t (u^p f(u) + \varepsilon g(u, \varepsilon)) du \right)$  ne serait qu'une petite perturbation du relief effectivement considéré.
3. Comme  $h(x, \varepsilon)/(x^p f(x))$  est bornée pour tout  $\varepsilon$  assez petit et élément d'un secteur  $S_0$ , la fonction  $y_0(x)$  est elle aussi bornée sur  $\mathcal{D}$ . Ensuite, d'après l'inégalité de Cauchy,  $y'_0(x)$  fait aussi partie des fonctions bornées sur  $\mathcal{D}$ .
4. Les points  $s_\varepsilon$  et les reliefs ne dépendent que de l'argument de  $\varepsilon$ , et pas de sa norme. L'intersection se fait donc uniquement sur le (petit) intervalle des arguments de  $\varepsilon$  possibles pour  $S_0$ . Comme le relief et les sommets dépendent continûment de  $\arg \varepsilon$ , en prenant  $S_0$  suffisamment peu ouvert, on est assuré que le domaine  $\mathcal{D}$  sera non vide.

Le théorème revient à montrer qu'il existe une vraie solution holomorphe correspondant à la solution formelle donnée ci-dessus dans certains domaines  $\mathcal{D}$  pour tout  $\varepsilon$  assez petit. On commencera par considérer le cas où  $\arg \varepsilon$  est une constante, avec le relief et le sommet  $s$  correspondants. On omettra le plus souvent dans la suite de rappeler la dépendance de la fonction  $y$  en  $\varepsilon$ .

On cherche cette solution holomorphe sous la forme  $y = y_0 + \varepsilon z$ . L'équation (I) devient alors

$$\begin{aligned} \varepsilon z'(x) = (x^p f(x) + \varepsilon g(x, \varepsilon))z(x) + y_0(x)g(x, \varepsilon) - y'_0(x) + \frac{h(x, \varepsilon) - h(x, 0)}{\varepsilon} \\ + (y_0(x) + \varepsilon z(x))^2 P(x, \varepsilon, \varepsilon y_0(x) + \varepsilon^2 z(x)) \end{aligned}$$

---

<sup>†</sup> autrement dit, la partie linéaire homogène de l'équation différentielle ne devient jamais négligeable par rapport aux autres termes ou aux constantes

En utilisant la formule de variation de la constante, on obtient

$$z(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma_x} e^{\frac{F(x)-F(t)}{\varepsilon}} \left( y_0(t)g(t, \varepsilon) - y'_0(t) + \frac{h(t, \varepsilon) - h(t, 0)}{\varepsilon} + H(t, \varepsilon, z(t)) \right) dt$$

avec  $\gamma_x$  un chemin partant du sommet  $s$  et descendant le relief jusqu'à  $x$ , et avec la fonction  $H(t, \varepsilon, z) = \varepsilon z g(t, \varepsilon) + (y_0(t) + \varepsilon z)^2 P(t, \varepsilon, \varepsilon y_0(t) + \varepsilon^2 z)$ .

On souhaite appliquer un théorème de point fixe, pour  $\varepsilon$  assez petit fixé. On considère pour cela les deux opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \tilde{\mathfrak{Z}} \subset \mathfrak{Z} &\rightarrow \mathfrak{H} \\ z &\mapsto \mathcal{H}(z), \end{aligned}$$

la fonction  $\mathcal{H}(z)$  étant telle que  $\mathcal{H}(z)(x, \varepsilon) = H(x, \varepsilon, z(x, \varepsilon))$  pour tout  $(x, \varepsilon) \in \mathcal{D} \times S_0$ ,

et

$$\mathcal{Z} : \tilde{\mathfrak{H}} \subset \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{Z}$$

$$H \mapsto z = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma_x} e^{\frac{F(x)-F(t)}{\varepsilon}} \left( y_0(x)g(t, \varepsilon) - y'_0(t) + \frac{h(t, \varepsilon) - h(t, 0)}{\varepsilon} + H(t) \right) dt$$

où  $\mathfrak{H}$  et  $\mathfrak{Z}$  sont les espaces fonctionnels suivants :

$$\mathfrak{Z} = \{z(x, \varepsilon) / z \text{ holomorphe et bornée dans } \mathcal{D} \times S_0\}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{H} = \Big\{ H(x, \varepsilon) / H \text{ est holomorphe dans } \mathcal{D} \times S_0, \\ \text{et } \sup_{x \in \mathcal{D}} \frac{H(x, \varepsilon)}{x^p f(x)} \text{ est borné indépendamment de } \varepsilon \Big\} \end{aligned}$$

Ces deux espaces sont munis des normes correspondantes  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ . Avec les hypothèses du théorème, les fonctions  $g(x, \varepsilon)$ ,  $P(x, \varepsilon, \varepsilon \delta)$  et  $h(x, \varepsilon)$  sont dans  $\mathfrak{H}$ , ainsi que  $\frac{\partial P}{\partial(\varepsilon y)}$ , et avec une norme dans cet espace que l'on peut majorer indépendamment de  $\varepsilon$ .

Alors  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{Z}$  sont des opérateurs contractants. En effet, on peut écrire (en omettant de rappeler les dépendances de  $g$ ,  $y_0$ ,  $z_k$  et  $H_k$  en  $x$  et  $\varepsilon$ ),

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(z_1) - \mathcal{H}(z_2) = & \left[ \varepsilon g + (2\varepsilon y_0 + \varepsilon^2(z_1 + z_2))P(x, \varepsilon, \varepsilon y_0 + \varepsilon^2 z_2) \right. \\ & \left. + (y_0^2 + 2\varepsilon y_0 z_1 + \varepsilon^2 z_1^2) \frac{P(x, \varepsilon, \varepsilon y_0 + \varepsilon^2 z_1) - P(x, \varepsilon, \varepsilon y_0 + \varepsilon^2 z_2)}{(z_1 - z_2)} \right] (z_1 - z_2) \end{aligned}$$

et on constate que, si  $\|z_k\| \leq \delta$  (on choisit ici  $\delta$  pour que ce soit vrai) et pour  $\varepsilon$  assez petit, on se trouve devant une combinaison linéaire de fonctions de  $\mathfrak{H}$ , avec  $g$ ,  $P$  et  $\frac{\partial P}{\partial(\varepsilon y)}$ , multipliées par des fonctions bornées sur  $\mathcal{D}$ , telles que  $y_0$  et  $z_1$ ,  $z_2$ . Cette combinaison linéaire est donc bornée, et comme on peut mettre un  $\varepsilon$  en facteur, on a :

$$\|\mathcal{H}(z_1) - \mathcal{H}(z_2)\|_{\mathfrak{H}} \leq |\varepsilon| C \|z_1 - z_2\| \quad (3.1)$$

Pour l'autre opérateur,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(H_1) - \mathcal{Z}(H_2) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma_x} e^{\frac{F(x)-F(t)}{\varepsilon}} (H_1(t) - H_2(t)) dt \\ \|\mathcal{Z}(H_1) - \mathcal{Z}(H_2)\| &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma_x} e^{\frac{R(x)-R(t)}{\varepsilon}} \|H_1 - H_2\|_{\mathfrak{H}} |t^p f(t)| dt \end{aligned}$$

en utilisant la condition d'accessibilité du domaine  $\mathcal{D}$ ,

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\|H_1 - H_2\|_{\mathfrak{H}}}{\varepsilon} \int_{\gamma_x} e^{\frac{R(x)-R(t)}{\varepsilon}} \frac{1}{C_{\gamma_x}} \frac{-d}{dt} R(t) dt \\ &\leq \|H_1 - H_2\|_{\mathfrak{H}} \frac{1}{C} \left[ e^{\frac{R(x)-R(t)}{\varepsilon}} \right]_s^x \end{aligned}$$

Donc l'opérateur  $\mathcal{Z}$  est tel que

$$\|\mathcal{Z}(H_1) - \mathcal{Z}(H_2)\| \leq M \|H_1 - H_2\|_{\mathfrak{H}} \quad (3.2)$$

où  $M$  peut bien être choisi indépendant de  $\varepsilon$ .

Vérifions que les ensembles d'arrivée des deux opérateurs sont bien ceux qui sont donnés.

Si  $z(x, \varepsilon) \in \mathfrak{Z}$ ,

$$\|\mathcal{H}(z)(x, \varepsilon)\|_{\mathfrak{H}} \leq |\varepsilon| \cdot \|z\| \cdot \|g\|_{\mathfrak{H}} + \|y_0 + \varepsilon z^2\| \cdot \|P(x, \varepsilon, \varepsilon \delta)\|_{\mathfrak{H}}, \quad (3.3)$$

ceci, si pour tous les  $z$  tels que  $\|y_0 + \varepsilon z\| \leq \delta$  (d'ailleurs, l'opérateur n'est défini que pour de tels éléments de  $\mathfrak{Z}$ , et non sur tout l'espace).

Si  $H(x, \varepsilon) \in \mathfrak{H}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(H) &= \mathcal{Z}(0) + (\mathcal{Z}(H) - \mathcal{Z}(0)) \\ \|\mathcal{Z}(H)\| &\leq \|\mathcal{Z}(0)\| + \|\mathcal{Z}(H) - \mathcal{Z}(0)\| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left\| y_0 g - y'_0 + \frac{\partial h}{\partial \varepsilon} \right\|_{\mathfrak{H}} e^{\frac{R(x)}{\varepsilon}} \int_{\gamma_x} e^{-\frac{R(t)}{\varepsilon}} |t^p f(t)| dt + M \|H - 0\|_{\mathfrak{H}} \\ \|\mathcal{Z}(H)\| &\leq M \left\| y_0 g - y'_0 + \frac{\partial h}{\partial \varepsilon} \right\|_{\mathfrak{H}} + M \|H\|_{\mathfrak{H}} \end{aligned} \quad (3.4)$$



En effet,  $y_0g$ ,  $y'_0$  et  $\frac{\partial h}{\partial \varepsilon}$  sont dans l'espace  $\mathfrak{H}$ , puisque  $y_0$  et  $y'_0$  sont bornées, et que  $g \in \mathfrak{H}$  et  $h \in \mathfrak{H}$ .

Donc, vu les inégalités (3.1) et (3.2) le théorème du point fixe est applicable dans ce cas pour l'opérateur  $\mathcal{ZO}\mathcal{H}$  pour tout  $\varepsilon$  dans  $S_0$ , assez petit.

Nous venons de démontrer exactement qu'il existe une solution  $y$  de l'équation différentielle étudiée qui tend uniformément (pour  $x \in \mathcal{D}$ ) vers  $y_0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans  $S_0$ . Cette solution  $y(x, \varepsilon)$  est holomorphe en ses deux variables dans  $\mathcal{D} \times S_0$ . En regardant un peu plus loin dans le développement de  $y$  on arrive au théorème suivant :

**Théorème 11** *La solution  $y$  du théorème 10 admet la solution formelle  $\hat{y} = \sum y_n(x)\varepsilon^n$  comme développement asymptotique, uniforme pour  $x \in \mathcal{D}$ , quand  $\varepsilon$  tend vers 0.*

Nous avons déjà montré que la vraie solution  $y(x, \varepsilon)$  existe et qu'elle est bornée dans  $\mathcal{D}$ . Par hypothèse, on sait pouvoir déterminer, pour tout  $N$ , les  $N$  premiers coefficients de la série formelle  $\hat{y} : y_0(x), \dots, y_{N-1}(x)$ . Posons  $R_N(x, \varepsilon)$  tel que

$$y(x, \varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots + \varepsilon^{N-1} y_{N-1}(x) + \varepsilon^N R_N(x, \varepsilon).$$

On sait de la fonction  $R_N(x, \varepsilon)$  qu'il s'agit, pour tout  $\varepsilon \in S_0$  fixé, d'une fonction holomorphe et bornée en  $x \in \mathcal{D}$ , et que  $\varepsilon^N R_N(x, \varepsilon)$  est bornée, uniformément pour  $x \in \mathcal{D}$ , quand  $\varepsilon$  tend vers 0 dans  $S_0$ . On souhaite montrer en plus que  $R_N(x, \varepsilon)$  est bornée sur  $\mathcal{D} \times S_0$ , en utilisant une équation différentielle pour  $R$ .

En remplaçant dans (i), on obtient une équation différentielle pour  $R_N$ , puisque tous les autres termes sont connus. Dans le cas  $N = 1$ , pour lequel on sait en plus que  $R_1(x, \varepsilon)$  est bornée sur  $\mathcal{D} \times S_0$ ,

$$\begin{aligned} \varepsilon (y_0 + \varepsilon R_1)' &= (x^p f + \varepsilon g) (y_0 + \varepsilon R_1) + h + \varepsilon (y_0 + \varepsilon R_1)^2 P(x, \varepsilon, \varepsilon y + \varepsilon^2 R_1) \\ \varepsilon R_1' &= (x^p f + \varepsilon g) R_1 + y_0 g - y'_0 + \frac{h(x, \varepsilon) - h(x, 0)}{\varepsilon} + y^2 P(x, \varepsilon, \varepsilon y), \end{aligned}$$

(on ne notera plus les dépendances en  $x$  et/ou  $\varepsilon$  des fonctions là où il n'y a pas d'ambiguïté)

On obtient bien une équation différentielle en  $R_1(x, \varepsilon)$ , les fonctions  $y$  et  $y_0$  en particulier pouvant être considérées comme données du problème. Cette équation différentielle est linéaire en  $R_1$ , mais on va se contenter de vérifier que les fonctions coefficients vérifient les propriétés du théorème 10.

Les fonctions  $f$  et  $g$  ne changent pas, leurs propriétés restent. La nouvelle fonction pour  $P$ ,  $P_1$ , est nulle. Le nouvel  $h$  est

$$h_1(x, \varepsilon) = y_0 g - y'_0 + \frac{h(x, \varepsilon) - h(x, 0)}{\varepsilon} + y^2 P(x, \varepsilon, \varepsilon y),$$

une fonction holomorphe en  $x$  sur  $\mathcal{D}_0$ , sauf éventuellement en  $x = 0$ , à cause de la présence de  $h$  dans l'expression ; elle est aussi holomorphe en  $\varepsilon$  dans  $S_0$ , et reste bornée quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , d'après ce qu'on sait de  $y$  et de la fraction en  $h$ . Enfin,  $h_1$  est bien dans l'espace  $\mathfrak{H}$  :

$$\left\| \frac{h_1(x, \varepsilon)}{x^p f} \right\| \leq \|y_0\| \cdot \left\| \frac{g}{x^p f} \right\| + \left\| \frac{1}{x^p f} \right\| \cdot \|y'_0\| + \left\| \sup_{\varepsilon} \frac{\partial h(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right\|_{\mathfrak{H}} + \|y\|^2 \cdot \left\| \frac{P(x, \varepsilon, \varepsilon y)}{x^p f(x)} \right\| ,$$

puisque toutes les normes citées existent bien.

On peut du coup appliquer l'intégralité du théorème 10, la fonction  $R_1$  converge quand  $\varepsilon$  tend vers 0, vers une fonction  $y_1(x)$ , uniformément pour  $x \in \mathcal{D}$  :  $R_1(x, \varepsilon) = y_1(x) + \varepsilon R_2(x, \varepsilon)$ . La fonction  $R_1$  est, pour tout  $\varepsilon$  assez petit, bornée dans  $\mathcal{D}$ .

Rien n'empêche de refaire le même raisonnement pour  $R_2$  à partir de l'égalité  $R_1 = y_1 + R_2$ . On a donc, par récurrence directe,

$$\left\| y(x, \varepsilon) - \sum_{i \leq N-1} y_i(x) \varepsilon^i \right\| \leq \varepsilon^N \|R_N(x, \varepsilon)\| ,$$

où  $R_N$  est, pour tout  $N$ , une fonction bornée en  $\varepsilon$  uniformément sur  $\mathcal{D}$  :  $\hat{y}$  est un développement asymptotique de  $y$ .

Pour être complet dans la démonstration, il faut remarquer que dans les hypothèses  $\mathbf{H}\bullet$ , on demande que  $h(x, \varepsilon)$  admette un développement asymptotique en  $\varepsilon$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0 dans  $S_0$ , ce qui n'est pas le cas *a priori* pour  $h_1(x, \varepsilon)$ , puisqu'on n'a pas d'abord cette propriété pour  $y(x, \varepsilon)$ . Mais ce n'est pas un problème : la démonstration du théorème 10 demande seulement que l'on puisse écrire  $h(x, \varepsilon) = h(x, 0) + \varepsilon h_\varepsilon(x, \varepsilon)$ , avec  $h_\varepsilon$  bornée dans  $\mathcal{D} \times S_0$ , et cela, on sait déjà pouvoir le faire pour  $y(x, \varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon R_1(x, \varepsilon)$ . Ce qui suffit pour appliquer la récurrence.

### 3.2.2 Au voisinage de 0

Dans cette section, nous allons montrer qu'il existe des solutions près du point tournant 0, très exactement pour des  $x$  dans des domaines

$$\{\varrho \varepsilon^r < |x| \leq \rho, \arg(x) \in [\theta_1, \theta_2]\} , \quad r = \frac{1}{p+1} .$$

Ces solutions seront aussi appelées solutions intérieures. Comme il s'agit de prolonger les solutions trouvées au paragraphe précédent, on conserve les hypothèses  $\mathbf{H}\bullet$ , et on fixe à nouveau (au moins dans un premier temps) un argument pour  $\varepsilon$ , dans  $S_0$ .

Pour arriver au résultat de prolongement, nous regardons maintenant ce qui se passe au voisinage de  $x = 0$ , en utilisant une *rloupez*. Ce changement de

variable donne une équation non singulièrement perturbée permettant effectivement d'analyser ce qui se passe au voisinage de 0. L'équation obtenue est appelée équation intérieure.

On pose

$$Y = \varepsilon y, \text{ et } X = \frac{x}{\varepsilon'},$$

sachant que  $\varepsilon' = \varepsilon^{1/(p+1)}$ , en prenant (par exemple) la valeur principale de la racine. En partant de  $\varepsilon \in S_0$ , on arrive ainsi à  $\varepsilon' \in S'_0$ .

L'équation (I) transformée s'écrit alors

$$\frac{dY}{dX} = \left( X^p f(\varepsilon' X) + \varepsilon' g(\varepsilon' X, \varepsilon) \right) Y + \varepsilon' h(\varepsilon' X, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon'^p} Y^2 P(\varepsilon' X, \varepsilon, Y). \quad (\text{II})$$

On va se placer dans un domaine  $\mathcal{D}_C$ , qui contient une partie de la montagne qui prolonge celle de  $\mathcal{D}$  vers 0 et de ses deux vallées adjacentes, soit, à peu de choses près, l'intersection d'un secteur ouvert centré en 0, d'amplitude  $\frac{3\pi}{p+1}$  et de taille  $\rho/\varepsilon'$  et de la boule  $|X| > \varrho = |X_l|$  (on se contentera d'une constante  $\varrho$  arbitrairement grande) :

$$\mathcal{D}_C = \left\{ X \in \mathbb{C} \mid \varrho < |X| \leq \rho/\varepsilon' \text{ et } \arg X \in \left] \theta, \theta + \frac{3\pi}{p+1} \right[ \right\}$$

À  $X$  donné, on définit le chemin  $\Gamma_X$  comme étant le chemin descendant le relief entre le point  $x_\rho/\varepsilon'$  et  $X$ .  $x_\rho$  est pris dans l'ensemble des points «au-dessus» de  $\varepsilon' X$  et de module  $\rho$  (cf. aussi fig. 8).

On a défini le domaine  $\mathcal{D}_C$ , de telle manière que, pour tout  $X \in \mathcal{D}_C$ , il existe un tel chemin  $\Gamma_X$ .

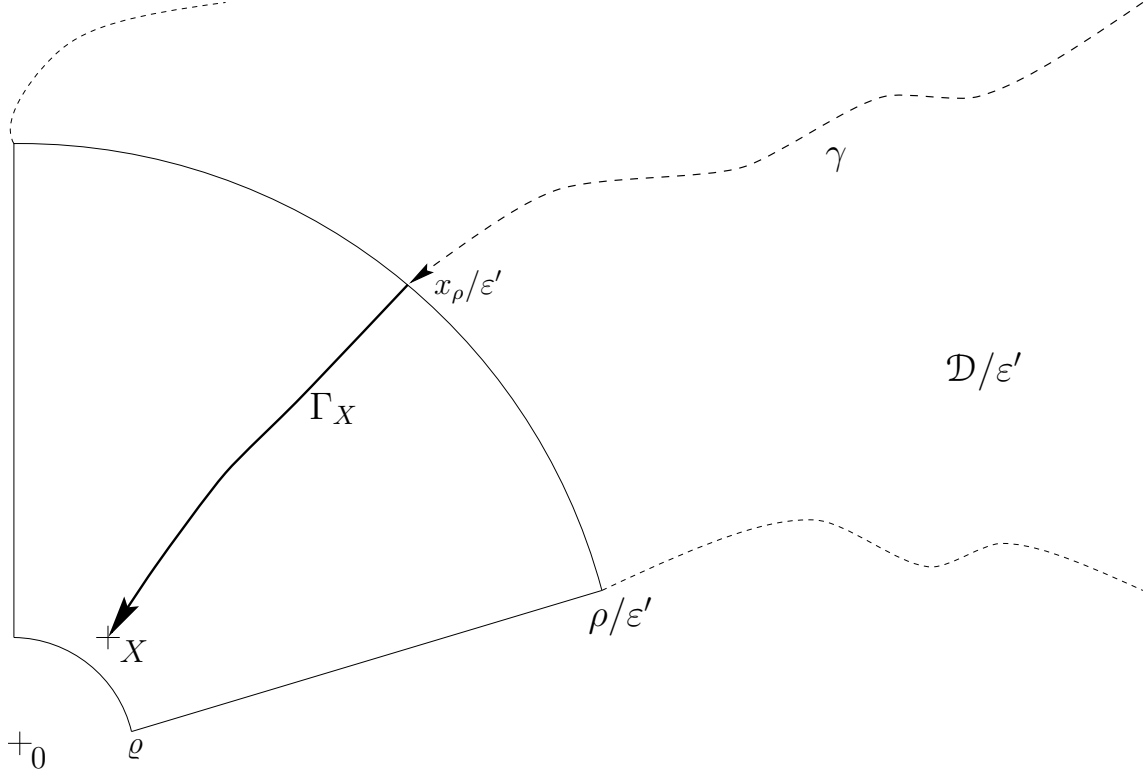
Une hypothèse nécessaire pour continuer est que les trois limites suivantes existent, au moins en tant que limites ponctuelles, pour tout  $X$  dans un domaine indépendant de  $\varepsilon$  incluant  $\mathcal{D}_C$ , comme l'ensemble  $\mathcal{D}_\infty = \left\{ X \in \mathbb{C} \mid |X| > |X_l| \text{ et } \arg X \in \left] \theta, \theta + \frac{3\pi}{p+1} \right[ \right\}$

et pour tout  $Y$ ,  $|Y| < \delta$ , pour un certain  $\delta$  fixé :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon' g(\varepsilon' X, \varepsilon'^{p+1}) &\xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} G_0(X) \\ \varepsilon' h(\varepsilon' X, \varepsilon'^{p+1}) &\xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} H_0(X) \\ P_\varepsilon(X, \varepsilon', Y) = \frac{P(\varepsilon' X, \varepsilon'^{p+1}, Y)}{\varepsilon'^p} &\xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} P_0(X, Y) \end{aligned} \right\} \quad (H_{\rightarrow 0})$$

Si on regarde ce que l'existence de telles limites signifie, on voit que ces hypothèses sont équivalentes à :

FIG. 8: Domaine  $\mathcal{D}_C$



1.  $g$  et  $h$  ont, au pire, un pôle en  $x = 0$ . Si  $g$  a effectivement un pôle, alors

$$g(x, \varepsilon) = g_0(\varepsilon) + g_1(\varepsilon)x + g_2(\varepsilon)x^2 + \dots + g_n(\varepsilon)x^n + \dots + \frac{g_{-1}(\varepsilon)}{x} + \varepsilon \left( \frac{g_{-2}(\varepsilon)}{x^2} + \dots + \frac{g_{-p-2}(\varepsilon)}{x^{p+2}} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{g_{-p-3}(\varepsilon)}{x^{p+3}} + \dots + \frac{g_{-2p-3}(\varepsilon)}{x^{2p+3}} \right) + \dots,$$

en écrivant  $g$  sous sa forme de série de Laurent en  $x = 0$  (en mettant  $\varepsilon$  en facteur là où il est nécessaire), dont tous les coefficients  $g_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  sont encore des fonctions holomorphes pour  $\varepsilon$  dans  $S_0$ , bornées quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ; d'où, ensuite

$$G_0(X) = \frac{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_{-1}(\varepsilon)}{X} + \frac{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_{-p-2}(\varepsilon)}{X^{p+2}} + \frac{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_{-2p-3}(\varepsilon)}{X^{2p+3}} + \dots$$

Si au contraire  $g$  est holomorphe en  $x = 0$ , alors  $G_0(X) \equiv 0$ . On obtient les mêmes résultats pour  $h$  et  $H_0$ . Il est clair que, dans tous les cas,  $\varepsilon'g(\varepsilon'X, \varepsilon)$  converge uniformément vers  $G_0(X)$ , puisque tous les termes des séries de Laurent restent bornés dans  $\mathcal{D}_C$  :  $\varepsilon'X$  et  $1/X$  sont en effet bornés dans ce domaine.

2.  $P(x, \varepsilon, \varepsilon y)$  peut s'écrire sous la forme  $x^p P_1(x, \varepsilon y) + \varepsilon P_2(x, \varepsilon, \varepsilon y)$ , et on trouve dans ce cas-là que

$$P_\varepsilon(X, \varepsilon', Y) = X^p P_1(\varepsilon' X, Y) + \varepsilon' P_2(\varepsilon' X, \varepsilon, Y),$$

puis  $P_0(X, Y) = X^p P_1(0, Y)$ .

Pour commencer, nous allons montrer qu'il existe, pour  $X$  assez grand, une solution  $Y_0$ , bornée dans un tel domaine  $\mathcal{D}_C$ , de l'équation obtenue en posant  $\varepsilon' = 0$  dans (II)

$$\frac{dY_0}{dX} = \left( X^p f(0) + G_0(X) \right) Y_0 + H_0(X) + Y_0^2 P_0(X, Y_0) \quad (3.5)$$

Il s'agit là d'une équation irrégulière singulière de rang  $p + 1$  (en l'infini), dont on sait qu'elle a des solutions asymptotiques. On redémontre ici sommairement ce résultat.

D'après leurs définitions,  $G_0(X)$ ,  $H_0(X)$  et  $P_0(X, \delta)/X^{p+1}$  tendent vers 0 quand  $X$  tend vers l'infini. On peut donc montrer qu'il existe une solution formelle en  $1/X$  à cette équation (3.5) :  $\hat{Y}_0(X) = -\frac{H_0(X)}{f(0)X^p} + \dots$ . Nous allons montrer, avec un point fixe, qu'il existe une et une seule solution à cette équation, qui tende vers 0 en l'infini, dans certains secteurs d'amplitude inférieure à  $3\frac{\pi}{p+1}$ ; la série formelle ci-dessus sera série asymptotique à cette solution. On trouve d'abord que  $Y_0$  est solution de l'équation

$$Y_0(X) = \int_{\infty}^X \exp \left( \int_t^X \left( u^p f(0) + G_0(u) \right) du \right) \left( H_0(t) + Y_0(t)^2 P_0(t, Y_0(t)) \right) dt$$

ce qui définit un opérateur  $\mathcal{Y}_0$  sur un sous-ensemble de l'espace des fonctions bornées dans  $\mathcal{D}_{\infty}$ , qui tendent vers 0 en l'infini. Les images de telles fonctions par cet opérateur sont aussi dans cet espace. Puis, si  $Y_0^+$  et  $Y_0^-$  sont deux fonctions de cet espace on a

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_0(Y_0^+) - \mathcal{Y}_0(Y_0^-) &= \int_{\Gamma_X} e^{\int_t^X \left( u^p f(0) + G_0(u) \right) du} (Y_0^+ - Y_0^-) \\ &\quad \times \left( (Y_0^+ + Y_0^-) P_0(t, Y_0^+) + Y_0^- \frac{P_0(t, Y_0^+) - P_0(t, Y_0^-)}{(Y_0^+ - Y_0^-)} \right) dt \\ \|\mathcal{Y}_0(Y_0^+) - \mathcal{Y}_0(Y_0^-)\| &\leq \|Y_0^+ - Y_0^-\| \int_{\Gamma_X} \exp \left( \Re \left( \int_t^X \left( u^p f(0) + G_0(u) \right) du \right) \right) \\ &\quad \times \left( 2\delta \sup_{|\delta'| < \delta} |P_0(t, \delta')| + \delta \sup_{|\delta'| < \delta} \left| \frac{\partial P_0}{\partial Y}(t, \delta') \right| \right) dt \end{aligned}$$

ce qui montre bien, puisque  $\frac{\partial P_0}{\partial Y}(t, \delta)/t^p$  et  $P_0(t, \delta)/t^p$  sont bornées, qu'on a un opérateur contractant pour tous les  $X$  accessibles, au moins pour l'ensemble des fonctions  $Y_0$  majorées par un certain  $\delta$  :

$$\delta \geq \|Y_0^\pm\| = \sup_{|X| > \varrho} |Y_0^\pm(X)|,$$

ce qui pour un  $\delta$  fixé est vrai pour tous les  $\varrho$  assez grands, puisque les fonctions  $Y_0$  tendent vers 0. De même, si  $\|Y_0\| < \delta$ , alors  $\|\mathcal{Y}_0(Y_0)\|$  est inférieur à  $\delta$  pour un  $\varrho$  assez grand, puisque  $H_0$  tend aussi vers 0 en l'infini.

Donc  $Y_0$  existe bien dans un domaine de type  $\mathcal{D}_\infty$ .

On remarque que si l'équation (II) est effectivement non singulièrement perturbée, on souhaite montrer un résultat d'existence non trivial, puisqu'il s'agit de solutions dans un domaine non borné (parce que dépendant de  $\varepsilon$ ), et avec des conditions initiales dépendant de  $\varepsilon$  (puisque on veut prolonger des solutions du paragraphe précédent).

Nous allons démontrer l'existence de solutions  $Y$  de (II) pour tous les  $X$  accessibles à partir d'un point  $x_\rho/\varepsilon'$  fixé. Nous les cherchons sous la forme  $Y = Y_0 + \varepsilon'Z$ . Alors

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dX} = & \left( X^p f(\varepsilon'X) + \varepsilon'g(\varepsilon'X, \varepsilon) \right) Z \\ & + \frac{\varepsilon'h(\varepsilon'X, \varepsilon) - H_0(X)}{\varepsilon'} + \left( \frac{\varepsilon'g(\varepsilon'X, \varepsilon) - G_0(X)}{\varepsilon'} + X^p \frac{f(\varepsilon'X) - f(0)}{\varepsilon'} \right) Y_0 \\ & + Y_0^2 \frac{\varepsilon'^{-p} P(\varepsilon'X, \varepsilon, Y_0 + \varepsilon'Z) - P_0(X, Y_0)}{\varepsilon'} + \left( 2Y_0Z + \varepsilon'Z^2 \right) \frac{P(\varepsilon'X, \varepsilon, Y_0 + \varepsilon'Z)}{\varepsilon'^p} \end{aligned} \quad (3.6)$$

(on omet de rappeler systématiquement la dépendance de  $Y_0$  en  $X$  et de  $Z$  en  $X$  et  $\varepsilon'$ )

On pose

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(X) &= \int^X (f(\varepsilon't)t^p + \varepsilon'g(\varepsilon't, \varepsilon)) dt \\ G(X, \varepsilon') &= \left( \frac{\varepsilon'g(\varepsilon'X, \varepsilon) - G_0(X)}{\varepsilon'} + X^p \frac{f(\varepsilon'X) - f(0)}{\varepsilon'} \right) Y_0 + \frac{\varepsilon'h(\varepsilon'X, \varepsilon) - H_0(X)}{\varepsilon'} \\ H(X, \varepsilon', Z) &= Y_0^2 \frac{P_\varepsilon(X, \varepsilon', Y_0 + \varepsilon'Z) - P_0(X, Y_0)}{\varepsilon'} + (2Y_0Z + \varepsilon'Z^2) P_\varepsilon(X, \varepsilon', Y_0 + \varepsilon'Z) \\ &= Y_0^2(X) X^p \frac{P_1(\varepsilon'X, Y_0(X) + \varepsilon'Z) - P_1(0, Y_0(X))}{\varepsilon'} \\ &\quad + P_2(\varepsilon'X, \varepsilon, Y_0(X) + \varepsilon'Z) + (2Y_0(X)Z + \varepsilon'Z^2) P_\varepsilon(X, \varepsilon', Y_0(X) + \varepsilon'Z) \end{aligned}$$

Avec ces notations, on prend

$$Z_H(X, \varepsilon') = \frac{1}{\varepsilon'} (\varepsilon y(x_\rho, \varepsilon) - Y_0(x_\rho / \varepsilon')) + \int_{\Gamma_X} e^{F_\varepsilon(X) - F_\varepsilon(t)} (G(t, \varepsilon') + H(t, \varepsilon', Z)) dt, \quad (3.7)$$

où à  $\varepsilon'$  fixé, le premier terme correspond à une condition initiale aux limites du domaine  $\mathcal{D}_C$ .

On va utiliser un théorème de point fixe avec des opérateurs ressemblants à ceux du paragraphe précédent :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \tilde{\mathcal{Z}} \subset \mathcal{Z} &\rightarrow \mathcal{H} \\ Z &\mapsto \mathcal{H}(Z), \end{aligned}$$

la fonction  $\mathcal{H}(Z)$  étant telle que  $\mathcal{H}(Z)(X, \varepsilon') = H(X, \varepsilon', Z(X, \varepsilon'))$  pour tout  $X \in \mathcal{D}_C$ , et

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} : \tilde{\mathcal{H}} \subset \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{Z} \\ H &\mapsto Z_H \end{aligned}$$

la fonction  $Z_H(X, \varepsilon')$  étant définie par la relation (3.7).

On peut noter que  $\mathcal{H}(Z)$  contient ici encore quelques termes linéaires en  $Z$ , qui resteront toutefois bornés par rapport à ceux présents dans  $F_\varepsilon$ .

Les deux opérateurs agissent à nouveau sur des sous-ensembles bornés d'espaces  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{Z}$ . Ces espaces fonctionnels sont les suivants :

$$\mathcal{H} = \left\{ H(X) / H \text{ est holomorphe pour tout } X \in \mathcal{D}_C, \text{ et } \sup_X \left| \frac{H(X)}{X^p f(0)} \right| \text{ est borné} \right\}$$

et

$$\mathcal{Z} = \left\{ Z(X) / Z \text{ est holomorphe sur } \mathcal{D}_C, \text{ et tel que } \sup_X |Z(X)| \text{ est borné} \right\}$$

(les sup sont bien sûr pris pour  $X$  dans le domaine  $\mathcal{D}_C$ ).

On voudrait qu'avec les normes correspondantes  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  et  $\|\cdot\|$ , l'inégalité suivante soit vraie :

$$\|\mathcal{H}(Z_1) - \mathcal{H}(Z_2)\|_{\mathcal{H}} \leq C_{\mathcal{H}} \|Z_1 - Z_2\|.$$

Or, si  $\|Z_k\| \leq \delta$ ,

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}(Z_1)(X, \varepsilon') - \mathcal{H}(Z_2)(X, \varepsilon')|(X) &\leq \|Z_1 - Z_2\| \times (|Y_0(X)| + |\varepsilon'|\delta) \\ &\quad \left( \sup_{|\delta'| \leq \delta} \left| \frac{\partial P_\varepsilon}{\partial Y}(X, \varepsilon', Y_0 + \varepsilon'\delta') \right| (|Y_0(X)| + |\varepsilon'\delta'|) + 2 \sup_{|\delta'| \leq \delta} |P_\varepsilon(X, \varepsilon', Y_0 + \varepsilon'\delta')| \right) \end{aligned}$$

Une condition suffisante est que, pour tout  $X$  dans  $\mathcal{D}_C$  et tout  $\varepsilon'$  assez petit la condition suivante est vérifiée :

$$\sup_{|\delta'| \leq \delta} \left| \frac{\partial P_\varepsilon}{\partial Y}(X, \varepsilon', Y_0 + \varepsilon' \delta') \right| \cdot (|Y_0| + |\varepsilon' \delta'|) + 2 \sup_{|\delta'| \leq \delta} |P_\varepsilon(X, \varepsilon', Y_0 + \varepsilon' \delta')| \leq M_\varrho |f(0)X^p| \quad (3.8)$$

Elle l'est en particulier si

$$\sup_{|\delta'| \leq \delta} |P_\varepsilon(X, \varepsilon', Y_0 + \varepsilon' \delta')| \leq M'_\varrho |f(\varepsilon' X)X^p|$$

Il suffit de revenir à la variable  $x$  pour s'apercevoir que cela correspond à une des hypothèses de croissance comparée du théorème 10 :

$$\frac{P(x, \varepsilon, \varepsilon y)}{f(x)x^p} = \frac{P_1(x, \varepsilon y)}{f(x)} + \varepsilon \frac{P_2(x, \varepsilon, \varepsilon y)}{x^p f(x)} \text{ est bornée.}$$

Cette hypothèse reste vraie jusqu'en  $x = 0$  pour le premier terme puisque  $P_1(x, \varepsilon y)/f(x)$  est holomorphe en ce point. En ce qui concerne le second terme, il reste borné pour tout  $x = \varepsilon' C$ ,  $C$  assez grand :  $\varepsilon/x^p$  est bornée pour les  $x$  de cette forme, et  $P_2/f$  est elle aussi holomorphe jusqu'en  $x = 0$ .

On a alors

$$\|\mathcal{H}(Z_1) - \mathcal{H}(Z_2)\|_{\mathcal{H}} \leq (\|Y_0\| + |\varepsilon' \delta|) M_\varrho \|Z_1 - Z_2\|. \quad (3.9)$$

Par ailleurs,

$$|\mathcal{Z}(H_1) - \mathcal{Z}(H_2)|(X, \varepsilon') \leq \int_{\Gamma_X} |e^{F_\varepsilon(X) - F_\varepsilon(t)} t^p f(0)| dt \times \|H_1 - H_2\|_{\mathcal{H}};$$

comme  $\varepsilon' g(\varepsilon' X, \varepsilon)$  est une fonction bornée sur  $\mathcal{D}_C$  et que  $|f(\varepsilon' t)t^p| = \mathcal{O}(|t|^p)$ , ce qui implique  $K_F^1 |t|^p < |F'_\varepsilon(t)| < K_F^2 |t|^p$ , on voit que

$$\|\mathcal{Z}(H_1) - \mathcal{Z}(H_2)\| \leq C_{\mathcal{Z}} \|H_1 - H_2\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.10)$$

Or  $\sup_{|X| > \varrho} |Y_0(X)| + |\varepsilon' \delta|$  peut être rendu aussi petit qu'on veut quand  $\varrho$  croît et que  $\varepsilon'$  est suffisamment petit. Comme par ailleurs  $C_{\mathcal{Z}}$  est une constante qu'on peut rendre indépendante de  $\varepsilon$  et  $X$ , et que  $M_\varrho$  est indépendante de  $\varepsilon$ , les deux inégalités (3.9) et (3.10) permettent d'envisager que l'opérateur  $\mathcal{Z} \circ \mathcal{H}$  soit contractant, au moins pour les  $X$  dans un certain domaine  $\mathcal{D}_C \subset \{X / |X| > \varrho\}$ .

Il reste à vérifier que les images de ces opérateurs (restreints sur des boules ouvertes de  $\mathcal{H}$  ou  $\mathcal{Z}$ ) sont bien incluses dans les espaces voulus.

Si  $Z$  est une fonction de  $\mathcal{Z}$ , dont la norme est majorée par un certain  $\delta > 0$ , la fonction image  $H(t, \varepsilon', Z(t, \varepsilon'))$  est bien dans l'espace  $\mathcal{H}$  :



- $P_\varepsilon$  est dans  $\mathcal{H}$  (puisque la condition (3.8) est vérifiée).
- $P_1(\varepsilon'X, Y_0 + \varepsilon'Z)$  et  $1/X^p P_2(\varepsilon'X, \varepsilon, Y_0 + \varepsilon'Z)$  sont holomorphes en toutes leurs variables, et donc bornées pour  $X \in \mathcal{D}_C$  et  $\|Z\| < \delta$ .
- comme  $P_1$  est holomorphe en  $\varepsilon'X$ , y compris au voisinage de 0, on peut écrire  $P_1(\varepsilon'X, Y_0 + \varepsilon'Z) = \sum_{n \geq 0} (\varepsilon'X)^n P_{1,n}(Y_0 + \varepsilon'Z)$ , donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon'} \left( P_1(\varepsilon'X, Y_0 + \varepsilon'Z) - P_1(0, Y_0) \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon'} \left( P_{1,0}(Y_0 + \varepsilon'Z) - P_{1,0}(Y_0) + \varepsilon'X \sum_{n \geq 1} (\varepsilon'X)^{n-1} P_{1,n}(Y_0 + \varepsilon'Z) \right) \\ &= Z \frac{\partial P_1}{\partial Y}(0, Y_0) \left( 1 + o_{\varepsilon'}(1) \right) + X \sum_{n \geq 1} (\varepsilon'X)^{n-1} P_{1,n}(Y_0 + \varepsilon'Z) \end{aligned}$$

et puisque la somme dans cette expression est bornée par une constante  $C\|P_1\|$ , et que la dérivée de  $P_1$  l'est aussi, on peut majorer cette différence, dans laquelle intervient toutefois à nouveau un facteur  $X$ .

Cela donne

$$\begin{aligned} |H(X, \varepsilon', Z)| &\leq \|Y_0^2\| \cdot \delta \cdot \left\| \frac{\partial P_1}{\partial Y}(0, Y_0) \right\| + \|XY_0^2\| \cdot C \cdot \|P_1\| + \|Y_0^2\| \cdot \|P_2\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + (2\delta \cdot \|Y_0\| + \varepsilon'\delta^2) \cdot \|P_\varepsilon(X, \varepsilon', Y_0 + \varepsilon'Z)\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

On voit que non seulement  $\mathcal{H}(Z)$  est dans l'espace  $\mathcal{H}$ , mais que sa norme peut être choisie aussi petite que l'on veut, si on prend  $\varepsilon'$  assez petit et  $\varrho$  assez grand, et ceci pour tout  $\delta$  fixé.

Dans l'autre sens, regardons quelle est l'image de la fonction nulle par  $\mathcal{Z}$ . Cette fonction image est bornée si  $G(X, \varepsilon')$  est dans  $\mathcal{H}$  et si  $\frac{1}{\varepsilon'}(\varepsilon y(x_\rho, \varepsilon) - Y_0(x_\rho/\varepsilon'))$  est bornée quand  $\varepsilon$  tend vers 0.

$$G(X, \varepsilon') = \left( \frac{\varepsilon'g(\varepsilon'X, \varepsilon) - G_0(X)}{\varepsilon'} + X^p \frac{f(\varepsilon'X) - f(0)}{\varepsilon'} \right) Y_0 + \frac{\varepsilon'h(\varepsilon'X, \varepsilon) - H_0(X)}{\varepsilon'}.$$

Or, d'après ce qui a été dit sur les conséquences des hypothèses  $(H_{\rightarrow 0})$ ,

$$\begin{aligned} \varepsilon'g(\varepsilon'X, \varepsilon) &= \varepsilon' \sum_{k \geq 0} g_k(\varepsilon)(\varepsilon'X)^k + \frac{g_{-1}(\varepsilon)}{X} \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'^p} \left( \varepsilon'^{p-1} \frac{g_{-2}(\varepsilon)}{X^2} + \dots + \varepsilon' \frac{g_{-p-1}(\varepsilon)}{X^{p+1}} \right) + \frac{g_{-p-2}(\varepsilon)}{X^{p+2}} + \dots \\ \frac{\varepsilon'g(\varepsilon'X, \varepsilon) - G_0(X)}{\varepsilon'} &= \sum_{k \geq 0} g_k(\varepsilon)(\varepsilon'X)^k + \frac{g_{-1}(\varepsilon) - g_{-1}(0)}{\varepsilon'X} \\ &\quad + \left( \varepsilon'^{p-1} \frac{g_{-2}}{X^2} + \dots + \varepsilon' \frac{g_{-p-1}}{X^{p+1}} \right) + \frac{g_{-p-2}(\varepsilon) - g_{-p-2}(0)}{\varepsilon'X^{p+2}} + \dots \end{aligned}$$

Donc  $\frac{\varepsilon' g(\varepsilon' X, \varepsilon) - G_0(X)}{\varepsilon'}$ , et de la même manière  $\frac{\varepsilon' h(\varepsilon' X, \varepsilon) - H_0(X)}{\varepsilon'}$ , sont des fonctions qui sont bornées dans  $\mathcal{D}_C$  ; elles sont dans l'espace  $\mathcal{H}$ , et leur norme dans cet espace tend vers 0 avec  $\varepsilon$ .

En revanche, la fraction  $\frac{f(\varepsilon' X) - f(0)}{\varepsilon'}$  n'est pas uniformément bornée pour  $X \in \mathcal{D}_C$ . On peut cependant démontrer le lemme de majoration suivant :

**Lemme 2** *Soit  $F(x)$  une fonction holomorphe dans la boule ouverte  $\mathcal{D}_F = \mathcal{B}(0, \rho)$ . Alors, pour tout  $X$  tel que  $(\varepsilon' X) \in \mathcal{D}_F$ ,*

$$\frac{F(\varepsilon' X) - F(0)}{\varepsilon'} = X \tilde{F}(\varepsilon' X),$$

où  $\tilde{F}$  est une fonction analytique ; de plus, si  $F$  est bornée,  $\tilde{F}$  est bornée elle aussi.

On écrit d'abord  $F(x) = \sum_{n \geq 0} f_n x^n$ , puis on en tire

$$\frac{F(\varepsilon' X) - F(0)}{\varepsilon'} = \sum_{n \geq 1} X f_n \times (\varepsilon' X)^{n-1}.$$

On a donc  $\tilde{F}(x) = \sum_{n \geq 1} f_n x^{n-1}$ , qui est bien analytique en  $x$ , et qui est bornée pour  $x \in \mathcal{D}_F$  si  $F$  l'est.  $\square$

Donc la fraction  $\frac{f(\varepsilon' X) - f(0)}{\varepsilon'}$  peut être d'ordre  $\mathcal{O}(X)$  ; mais parce que  $Y_0(X)$  tend vers 0 quand  $X \rightarrow \infty$  au moins aussi vite que  $1/X$ , la fonction  $Y_0(X) \frac{f(\varepsilon' X) - f(0)}{\varepsilon'}$  est, elle, bien bornée, et donc  $X^p Y_0(X) \frac{f(\varepsilon' X) - f(0)}{\varepsilon'}$  est une fonction de  $\mathcal{H}$ , elle aussi.

Il ne reste donc qu'une dernière condition à contrôler : on veut montrer que la condition initiale  $Z(x_\rho/\varepsilon', \varepsilon') = \frac{1}{\varepsilon'} (\varepsilon y(x_\rho, \varepsilon) - Y_0(x_\rho/\varepsilon'))$  est aussi petite que l'on veut pour tout  $\varepsilon'$  assez petit. Or  $y(x_\rho, \varepsilon)$  est borné en  $\varepsilon$ , et  $Y_0(x_\rho/\varepsilon')$  est équivalent à

$$Y_0(x_\rho/\varepsilon') \underset{\varepsilon' \rightarrow 0}{\sim} \frac{H_0(x_\rho/\varepsilon')}{f(0) (x_\rho/\varepsilon')^p} \sim \varepsilon'^p \frac{H_0(x_\rho/\varepsilon')}{f(0) (x_\rho)^p},$$

sachant que  $H_0(x_\rho/\varepsilon')$  est au mieux un  $\mathcal{O}(\varepsilon')$ . On est donc assuré que  $Z(x_\rho/\varepsilon', \varepsilon')$  est d'ordre au pire  $\varepsilon'^p$  quand  $\varepsilon'$  tend vers 0, ce qui nous suffit largement.

Donc  $G(X, \varepsilon')$  est une fonction de  $\mathcal{H}$ , on peut donc écrire

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Z}(0)\| \leq \|Y_0\| \cdot & \left\| \frac{\varepsilon' g(\varepsilon' X, \varepsilon) - G_0(X)}{\varepsilon'} \right\|_{\mathcal{H}} + \left\| X^p Y_0(X) \frac{f(\varepsilon' X) - f(0)}{\varepsilon'} \right\|_{\mathcal{H}} \\ & + \left\| \frac{\varepsilon' h(\varepsilon' X, \varepsilon) - H_0(X)}{\varepsilon'} \right\|_{\mathcal{H}} + |Z(x_\rho/\varepsilon', \varepsilon')| \end{aligned}$$

Tous ces termes sont bornés, pour tout  $\varepsilon'$  assez petit, et ils décroissent avec  $\varrho = |X_l|$ .

On choisit donc  $\delta \geq 2\|\mathcal{Z}(0)\|$ , puis on augmente la valeur de  $\varrho$  et on fait décroître celle de  $|\varepsilon'|$  jusqu'à ce que

$$C_{\mathcal{Z}}M_{\varrho}(\|Y_0\| + \varepsilon'\delta) < 1 \quad \text{et que} \quad \sup_{\|Z\| < 2\delta} \|H(X, \varepsilon', Z)\|_{\mathcal{H}} < \delta/C_{\mathcal{Z}}.$$

Dans ce cas, la composition des deux opérateurs  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{Z}$  est bien un opérateur contractant.

On peut alors énoncer le théorème suivant.

**Théorème 12** *On suppose que pour l'équation (I) les hypothèses  $(H_{\rightarrow 0})$  et celles du théorème 10, pour tout  $r > 0$ , sont vérifiées dans un  $x$ -domaine accessible (avec le relief  $\mathfrak{R}_{\frac{F(x)}{\varepsilon}}$ ), qu'on note à nouveau  $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_0$ . Soit  $X_l$  un réel assez grand, indépendant d' $\varepsilon$  si  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ . Soit alors pour un tel  $\varepsilon$  fixé des domaines*

$$\mathcal{D}_C = \left\{ X \in \mathbb{C} \mid \varrho < |X| \leq \rho/\varepsilon' \text{ et } \arg X \in \left] \theta_1, \theta_2 \right[ \right\}$$

$\theta_1$  et  $\theta_2$  étant choisis, pour un  $\varepsilon$  donné, tels que tout point  $X$  de  $\mathcal{D}_C$  soit accessible (avec le relief  $\mathfrak{R}(\varepsilon' u^{p+1} f(0))$ ) à partir d'au moins un point de la forme  $x/\varepsilon'$ , où  $x \in \mathcal{D}$ ; et

$$\mathcal{D}_{\varepsilon'} = \mathcal{D} \cup \{x \in \mathbb{C} \mid (x/\varepsilon') \in \mathcal{D}_C\}.$$

Alors il existe une solution holomorphe  $y$  de (I) sur  $\mathcal{D}_{\varepsilon'}$  telle que  $\varepsilon y$  est bornée quand  $\varepsilon$  tend vers 0, et  $\varepsilon y(X\varepsilon', \varepsilon) = Y(X, \varepsilon')$  tend, uniformément pour  $X$  dans  $\mathcal{D}_C$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0, vers une fonction  $Y_0(X)$  solution de l'équation (2.2).

On sait qu'il existe une unique solution au problème de Cauchy suivant :  $Y(X, \varepsilon')$  est solution de (II) et vérifie  $Y(x_{\rho}/\varepsilon', \varepsilon') = \varepsilon y(x_{\rho}, \varepsilon)$ . On vient de montrer que cette solution existe sur la partie du domaine  $\mathcal{D}_C$  accessible à partir du  $x_{\rho}/\varepsilon'$  choisi et qu'elle reste dans un certain voisinage de  $Y_0(X)$ . Or, par unicité des solutions avec la condition initiale au point  $x_{\rho}$ , la solution de (I)  $y(x, \varepsilon)$  pour  $x \in \mathcal{D}, |x| \geq \rho$  se prolonge avec la fonction  $\frac{1}{\varepsilon}Y(x/\varepsilon', \varepsilon)$  dans toute la partie de  $\mathcal{D}_C$  accessible; et comme tout  $\mathcal{D}_C$  est accessible à partir des  $x_{\rho}/\varepsilon'$  (et même d'un nombre fini de tels points), et qu'il ne peut y avoir qu'un seul prolongement dans ce domaine,  $y(x, \varepsilon)$  se prolonge en fait avec  $\frac{1}{\varepsilon}Y(x/\varepsilon', \varepsilon)$  pour l'ensemble des  $x \in \varepsilon'\mathcal{D}_C$ .

Ce qui clôt la démonstration du théorème.

Cette solution  $y(x, \varepsilon)$  est holomorphe en ses deux variables dans  $\mathcal{D}_{\varepsilon'} \times S_0$ . Pour démontrer la dépendance holomorphe en  $\varepsilon'$ , puis en  $\varepsilon$ , de la fonction  $Y(X, \varepsilon)$  correspondante, on procède comme pour le théorème 10, en prenant un  $\mathcal{D}'_{\varepsilon}$  accessible pour un intervalle d'arguments de  $\varepsilon'$  et en considérant des espaces de fonctions sur  $\mathcal{D}_C \times S_0$ . On ne détaillera pas la démonstration du théorème 12 modifiée ici.

### 3.2.3 Développement de la solution intérieure

La solution  $Y(X, \varepsilon')$  trouvée tend vers  $Y_0(X)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , uniformément pour  $X \in \mathcal{D}_C$ . Admet-elle un développement asymptotique de la forme  $\hat{Y} = \sum_{n \geq 0} Y_n(X) \varepsilon'^n$ , uniformément dans tout le domaine  $\mathcal{D}_C$  ?

La réponse n'est pas toujours positive. Si on tente de poser

$$Y(X, \varepsilon') = \sum_{0 \leq n \leq N} Y_n(X) \varepsilon'^n + \varepsilon'^{N+1} \tilde{Y}(X, \varepsilon')$$

et de montrer que  $\tilde{Y}$  est bornée de la même manière qu'on a montré que  $Z$  était bornée (théorème 12), on se retrouve face à un problème : au cours de la démonstration, on devait montrer, page 66, que  $G$  était dans  $\mathcal{H}$ , ce qui n'est vrai que parce que  $Y_0$  tend vers 0 en l'infini. Mais on peut seulement montrer en général que  $Z$  est bornée dans  $\mathcal{D}_C$  ; une démonstration par récurrence générale, valable sur tout le domaine  $\mathcal{D}_C$  comme dans le cas de l'équation de Van der Pol, est donc exclue.

Par contre, on peut arriver à démontrer le corollaire suivant.

**Corollaire 13** *La fonction  $Y(X, \varepsilon')$  du théorème 12 vérifie la propriété suivante. Soit  $\mu \in ]0, 1[$ , et  $\varrho > 0$  un réel assez grand avec le domaine  $\mathcal{D}_C$  qui en dépend de la manière habituelle. Il existe une suite de fonctions  $Y_0, Y_1, \dots, Y_n, \dots$  telle que, pour tout  $N$ ,*

$$Y(X, \varepsilon') - \sum_{n=0}^{N-1} Y_n(X) \varepsilon'^n = \varepsilon'^N Z_N(X, \varepsilon'),$$

*la fonction  $Z_N(X, \varepsilon')$  étant définie pour  $X \in \mathcal{D}_C$ , mais bornée par  $\varepsilon'^{-(N-1)\mu}$  quand  $\varepsilon'$  tend vers 0 et seulement pour les  $X$  tels que  $\varrho < X < |\varepsilon'|^{-\mu}$  (on notera  $\mathcal{D}_{C\mu}$  l'ensemble des  $X$  bornés de cette manière et qui sont aussi dans  $\mathcal{D}_C$ ).*

Nous démontrerons cette propriété par récurrence sur  $N$ , en réutilisant une partie de la démonstration du théorème précédent. On y traite de fait le cas  $N = 0$  :  $Z_1(X, \varepsilon')$  est une fonction bornée, en particulier pour les  $X < |\varepsilon'|^{-\mu}$ .

Mais auparavant, nous allons montrer certaines propriétés de majoration. On introduit dans ce but, pour tout  $m \in \mathbb{Z}$  la classe de fonctions suivante :  $F(X, \varepsilon', y, y_0) \in \mathcal{F}_m$  si  $F$  s'écrit comme une somme finie telle que

$$F(X, \varepsilon', y, y_0) = \sum_l E_l(X) F_l(\varepsilon' X, \varepsilon', y, y_0)$$

où

- $F_l(x, \varepsilon', y, y_0)$  est une fonction bornée, holomorphe au voisinage de  $x = 0$ , pour  $\varepsilon'$  dans des secteurs  $S'_0$  et pour  $|y| \leq \delta$ ,  $|y_0| \leq \delta$  ; elle admet un développement asymptotique uniforme quand  $\varepsilon' \rightarrow 0$ .

►  $X^{-m}E_l(X)$  est holomorphe et bornée indépendamment de  $\varepsilon'$  dans  $\mathcal{D}_{C\mu}$ .

Comme propriété de ces classes de fonctions, on peut noter que, si  $F \in \mathcal{F}_m$  et  $G \in \mathcal{F}_n$ , alors

- ★  $F + G$  est dans  $\mathcal{F}_{\sup(m,n)}$ .
- ★  $F \times G$  est dans  $\mathcal{F}_{m+n}$ .
- ★  $\frac{\partial F}{\partial Y}$  est une fonction de  $\mathcal{F}_m$ , quitte à diminuer  $\delta$ .
- ★  $\varepsilon' F \in \mathcal{F}_{m-1}$ .

Nous allons démontrer le lemme suivant :

**Lemme 3** *Soit  $F(X, \varepsilon', y, y_0)$  une fonction de  $\mathcal{F}_m$ . La fonction  $\tilde{F}$  définie comme*

$$\tilde{F} : (X, \varepsilon', y, y_0) \mapsto \frac{F(X, \varepsilon', y, y_0) - F(X, 0, y, y_0)}{\varepsilon'}$$

*est une fonction de la classe  $\mathcal{F}_{m+1}$ .*

La démonstration ressemble à celle du lemme 2. On écrit  $F_l$  comme la somme convergente (pour  $\varepsilon'X$  assez petit)

$$F_l(\varepsilon'X, \varepsilon', y, y_0) = \sum_{k \geq 0} (\varepsilon'X)^k F_{l,k}(\varepsilon', y, y_0).$$

On arrive alors à l'expression suivante (où la  $\sum_k$  reste convergente si  $\varepsilon'X$  est assez proche de 0) :

$$\tilde{F}(X, \varepsilon', y, y_0) = \sum_l E_l \times \left( \sum_{k \geq 1} X F_{l,k}(\varepsilon', y, y_0) (\varepsilon'X)^{k-1} + \frac{F_{l,0}(\varepsilon', y, y_0) - F_{l,0}(0, y, y_0)}{\varepsilon'} \right);$$

comme  $F_{l,0}$  admet un développement asymptotique uniforme en  $\varepsilon' = 0$ ,

$$\tilde{F}(X, \varepsilon', y, y_0) = \sum_l E_l(X) X \tilde{F}_l(\varepsilon'X, \varepsilon', y, y_0) + \sum_l E_l(X) \frac{F_{l,0}(\varepsilon', y, y_0) - F_{l,0}(0, y, y_0)}{\varepsilon'}.$$

$|X^{-m-1}E_l(X)X|$  et  $|X^{-m-1}E_l(X)|$  étant bornées dans  $\mathcal{D}_{C\mu}$ , la fonction  $\tilde{F}$  est donc dans  $\mathcal{F}_{m+1}$ . □

Pour  $N = 1$ , on reprend l'équation pour  $Z$  (3.6) vue plus haut, qui est vérifiée par  $Z_1$  :

$$\frac{dZ}{dX} = f_\varepsilon(X)Z + G(X, \varepsilon') + H(X, \varepsilon', Z)$$

avec

$$\begin{aligned}
f_\varepsilon(X) &= f(\varepsilon'X)X^p + \varepsilon'g(\varepsilon'X, \varepsilon) \\
G(X, \varepsilon') &= \left( \frac{\varepsilon'g(\varepsilon'X, \varepsilon) - G_0(X)}{\varepsilon'} + X^p \frac{f(\varepsilon'X) - f(0)}{\varepsilon'} \right) Y_0 + \frac{\varepsilon'h(\varepsilon'X, \varepsilon) - H_0(X)}{\varepsilon'} \\
H(X, \varepsilon', Z) &= Y_0^2 \frac{P_\varepsilon(X, \varepsilon', Y_0 + \varepsilon'Z) - P_0(X, Y_0)}{\varepsilon'} + (2Y_0Z + \varepsilon'Z^2)P_\varepsilon(X, \varepsilon', Y_0 + \varepsilon'Z) \\
&= Y_0^2 \frac{P_\varepsilon(X, \varepsilon', Y_0 + \varepsilon'Z) - P_0(X, Y_0)}{\varepsilon'} + (Y_0 + Y)ZP_\varepsilon(X, \varepsilon', Y_0 + \varepsilon'Z)
\end{aligned}$$

Pour simplifier au maximum le terme  $H$ , nous allons réorganiser l'équation, en utilisant le fait que  $Y$  est maintenant connue, comme fonction holomorphe bornée. On reprend la décomposition suivante de  $P_\varepsilon$  donnée parmi les hypothèses :

$$P_\varepsilon(X, \varepsilon', Y) = X^p P_1(\varepsilon'X, Y) + \varepsilon' P_2(\varepsilon'X, \varepsilon, Y),$$

puis

$$\begin{aligned}
X^p P_1(\varepsilon'X, Y) - P_0(X, Y_0) &= X^p (P_1(\varepsilon'X, Y) - P_1(0, Y) + P_1(0, Y) - P_1(0, Y_0)) \\
&= X^p (P_1(\varepsilon'X, Y) - P_1(0, Y)) \\
&\quad + X^p(Y - Y_0) \int_0^1 \frac{\partial P_1}{\partial Y}(0, Y_0 + t(Y - Y_0)) dt;
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\frac{P_\varepsilon(X, \varepsilon', Y_0 + \varepsilon'Z) - P_0(X, Y_0)}{\varepsilon'} &= X^p \frac{P_1(\varepsilon'X, Y) - P_1(0, Y)}{\varepsilon'} + P_2(\varepsilon'X, \varepsilon, Y) \\
&\quad + X^p Z \int_0^1 \frac{\partial P_1}{\partial Y}(0, Y_0 + t(Y - Y_0)) dt.
\end{aligned}$$

On peut obtenir ainsi comme équation différentielle pour  $Z_1$  :

$$\frac{dZ_1}{dX} = f_1(X, \varepsilon', Y(X, \varepsilon'), Y_0(X))Z_1 + G_1(X, \varepsilon', Y(X, \varepsilon'), 0)$$

avec

$$\begin{aligned}
f_1(X, \varepsilon', y, y_0) &= f(\varepsilon'X)X^p + \varepsilon'g(\varepsilon'X, \varepsilon) + (Y_0(X) + y)P_\varepsilon(X, \varepsilon', y) \\
&\quad + X^p Y_0^2(X) \int_0^1 \frac{\partial P_1}{\partial Y}(0, y_0 + t(y - y_0)) dt \\
G_1(X, \varepsilon', y, y_0) &= \left( \frac{\varepsilon'g(\varepsilon'X, \varepsilon) - G_0(X)}{\varepsilon'} + X^p \frac{f(\varepsilon'X) - f(0)}{\varepsilon'} \right) Y_0(X) \\
&\quad + \frac{\varepsilon'h(\varepsilon'X, \varepsilon) - H_0(X)}{\varepsilon'} \\
&\quad + Y_0^2(X)P_2(\varepsilon'X, \varepsilon, y) + Y_0^2(X)X^p \frac{P_1(\varepsilon'X, y) - P_1(0, y)}{\varepsilon'}
\end{aligned}$$

C'est à partir de cette équation devenue linéaire en  $Z$  que nous ferons la démonstration par récurrence.

D'après ce qui a été vu plus haut ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

- $f_1(X, \varepsilon', y, y_0)$  est de classe  $\mathcal{F}_p$ .
- $G_1(X, \varepsilon', y, y_0)$  est aussi de la même classe  $\mathcal{F}_p$ .
- $Z_1$  est une fonction bornée dans  $\mathcal{D}_\mu$ , donc bornée dans  $\mathcal{D}_{C\mu}$ .

On note  $Y_1(X)$  la solution de l'équation de  $Z_1$  avec  $\varepsilon' = 0$  qui est bornée dans  $\mathcal{D}_\infty$  ( $Y_1 \in \mathcal{F}_0$ ) ; on montre l'existence de cette solution comme on a montré celle de  $Y_0$ , sachant que  $X^{-p}f_1(X, 0, Y_0(X), Y_0(X))$  et  $X^{-p}G_1(X, 0, Y_0(X), 0)$  sont deux fonctions bornées dans  $\mathcal{D}_{C\mu}$ .

On pose ensuite

$$Z_1(X, \varepsilon') = Y_1(X) + \varepsilon' Z_2(X, \varepsilon').$$

Nous aurons donc besoin de compléter le lemme 3, en regardant ce qu'on peut en déduire pour les classes  $\mathcal{G}_m^k(Z)$  comprenant les fonctions  $G(X, \varepsilon', y, y_0, Z)$ , où  $G$  est un polynôme en  $Z$  dont les coefficients  $G_l$  de  $Z^l$  sont dans  $\mathcal{F}_{k-lm}$ .

L'intérêt principal de ces classes  $\mathcal{G}$  de fonctions est que, si on sait que  $X^{-m}Z(X, \varepsilon')$  est une fonction bornée dans  $\mathcal{D}_{C\mu}$ , alors  $G(X, \varepsilon', Y(X, \varepsilon'), Y_0(X), Z(X, \varepsilon'))$  croît au plus comme  $X^{p+n-1}$  avec  $X$  dans ce domaine.

**Lemme 4** Soit  $G(X, \varepsilon', y, y_0, Z)$  une fonction de  $\mathcal{G}_{m-2}^k(Z)$ . Alors on a les propriétés suivantes :

1.  $G$  multiplié par une fonction de  $\mathcal{F}_l$  est dans  $\mathcal{G}_{m-2}^{k+l}(Z)$ .
2. Le produit de  $G$  par  $Z$  est dans  $\mathcal{G}_{m-2}^{k+m-2}(Z)$ .
3.  $\frac{\partial G}{\partial Z}(X, \varepsilon', y, y_0, Z) \in \mathcal{G}_{m-2}^{k-m+2}(Z)$ .
4. Une fonction  $G(X, \varepsilon', y, y_0, Z_{m-1})$  de  $\mathcal{G}_{m-2}^k(Z_{m-1})$  peut se transformer en posant  $Z_{m-1} = Y_{m-1}(X) + \varepsilon' Z_m$ . La fonction  $\tilde{G}(X, \varepsilon', y, y_0, Z_m)$  obtenue est alors dans  $\mathcal{G}_{m-1}^k(Z_m)$ .

1. Ce premier point est trivial.
2. Pour démontrer cette propriété, on part de la définition :

$$G(X, \varepsilon', y, y_0, Z) = \sum_l G_l Z^l, \quad G_l(X, \varepsilon', y, y_0) \in \mathcal{F}_{k-l(m-2)}$$

$$G(X, \varepsilon', y, y_0, Z)Z = \sum_l G_l Z^{l+1} = \sum_l G_{l-1} Z^l,$$

$$\text{et } G_{l-1} \in \mathcal{F}_{k-(l-1)(m-2)} = \mathcal{F}_{k+m-2-l(m-2)}$$

3. On procède comme ci-dessus :

$$\frac{\partial G}{\partial Z}(X, \varepsilon', y, y_0, Z) = \sum_l G_l l Z^{l-1} = \sum_l (l+1) G_{l+1} Z^l$$

avec  $(l+1)G_{l+1} \in \mathcal{F}_{k-(l+1)(m-2)} = \mathcal{F}_{k-m+2-l(m-2)}$ . D'où la propriété annoncée.

4. La démonstration ici se fait en écrivant  $Z_{m-1} = Y_{m-1} + \varepsilon' Z_m$ , où  $Y_{m-1} \in \mathcal{F}_{m-2}$ . On obtient alors un polynôme en  $Z_m$  dont le terme en  $Z_m^l$  est une somme de termes de la forme

$$G_j C_j^l Y_{m-1}^{j-l} \varepsilon'^l Z_m^l,$$

où  $C_j^l$  désigne le nombre de combinaisons, et  $G_j$  est par définition dans  $\mathcal{F}_{k-j(m-2)}$ ; ce qui fait qu'on a en facteur de  $Z_m^l$  une fonction dans  $\mathcal{F}_{k-j(m-2)+(m-2)(j-l)-l} = \mathcal{F}_{k-l(m-1)}$ , pour tout  $l$ . On remarque en passant que  $G(X, \varepsilon', y, y_0, Y_{m-1}(X))$  peut se voir comme un élément de  $\mathcal{F}_k$ .

Ces propriétés servent essentiellement à démontrer le lemme suivant :

**Lemme 5** Soit  $G \in \mathcal{G}_{m-2}^k(Z)$  et  $H$  la fonction définie par

$$H(X, \varepsilon') = G\left(X, \varepsilon', Y(X, \varepsilon'), Y_0(X), Z_{m-1}(X, \varepsilon')\right).$$

Alors il existe  $\check{G} \in \mathcal{G}_{m-1}^{k+1}(Z_m)$  telle que

$$\frac{1}{\varepsilon'} \left( H(X, \varepsilon') - H(X, 0) \right) = \check{G}\left(X, \varepsilon', Y(X, \varepsilon'), Y_0(X), Z_m(X, \varepsilon')\right).$$

On décompose

$$\begin{aligned} \check{G}(X, \varepsilon', Y, Y_0, Z_m) &= \frac{G(X, \varepsilon', Y, Y_0, Z_{m-1}) - G(X, 0, Y, Y_0, Z_{m-1})}{\varepsilon'} \\ &+ \frac{G(X, 0, Y(X, \varepsilon'), Y_0(X), Z_{m-1}) - G(X, 0, Y(X, 0), Y_0(X), Z_{m-1})}{\varepsilon'} \\ &+ \frac{G(X, 0, Y_0, Y_0, Z_{m-1}(X, \varepsilon')) - G(X, 0, Y_0, Y_0, Z_{m-1}(X, 0))}{\varepsilon'} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dans cette somme,

1. Le premier terme correspond, si on utilise le lemme 3, à un polynôme en  $Z_{m-1}$  dont le coefficient  $H_l(X, \varepsilon', Y, Y_0)$  pour  $Z_{m-1}^l$  est dans  $\mathcal{F}_{k+1-l(m-2)}$ . Si on remplace ensuite  $Z_{m-1}^l$  par  $(Y_{m-1} + \varepsilon' Z_m)^l$ , on retrouve le résultat de la propriété 4 ci-dessus.

Le premier terme est donc dans  $\mathcal{G}_{m-1}^{k+1}(Z_m)$ .



2. On peut écrire la deuxième fraction de (3.11), à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral

$$\frac{Y(X, \varepsilon') - Y(X, 0)}{\varepsilon'} \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial Y} \left( X, 0, [Y_0 + t(Y - Y_0)](X, \varepsilon'), Y_0, Z_{m-1}(X, \varepsilon') \right) dt.$$

L'intégrale est holomorphe en  $Y$  et  $Y_0$ , et c'est aussi un polynôme en  $Z_{m-1}$  qui reste dans  $\mathcal{G}_{m-2}^k(Z_{m-1})$ . On le multiplie par

$$\begin{aligned} \frac{Y(X, \varepsilon') - Y(X, 0)}{\varepsilon'} &= Z_1(X, \varepsilon') \\ &= Y_1(X) + \varepsilon' Y_2(X) + \dots + \varepsilon'^{m-2} Y_{m-1}(X) + \varepsilon'^{m-1} Z_{m-1}; \end{aligned}$$

puisque  $\varepsilon'^{j-2} Y_{j-1}(X) \in \mathcal{F}_0$  pour tout  $j$ , avec les points 1 et 2 du lemme, on sait que le produit est dans

$$\mathcal{G}_{m-2}^k(Z_{m-1}) \cup \mathcal{G}_{m-2}^{k-(m-1)+m-2}(Z_{m-1}) \subset \mathcal{G}_{m-2}^k(Z_{m-1}).$$

La deuxième fraction est donc (largement) dans  $\mathcal{G}_{m-1}^{k+1}(Z_m)$ .

3. La troisième fraction se réécrit aussi avec une formule de Taylor

$$\begin{aligned} &\frac{Z_{m-1}(X, \varepsilon') - Z_{m-1}(X, 0)}{\varepsilon'} \times \\ &\int_0^1 \frac{\partial G(X, 0, Y, Z)}{\partial Z} \left( X, 0, Y_0, Y_0, [Z_{m-1} + t(Z_{m-1} - Y_{m-1})](X, \varepsilon') \right) dt. \end{aligned}$$

On intègre un polynôme en  $t$  dont les coefficients sont, d'après la propriété 3 du lemme précédent, des éléments de  $\mathcal{G}_{m-2}^{k-m+2}(Z_{m-1})$ , ou (avec la propriété 4) de  $\mathcal{G}_{m-1}^{k-m+2}(Z_m)$ . L'intégrale est donc dans  $\mathcal{G}_{m-1}^{k-m+2}(Z_m)$ . On la multiplie par la fraction, égale à  $Z_m$ . On se retrouve donc dans  $\mathcal{G}_{m-1}^{k-m+2+(m-1)} = \mathcal{G}_{m-1}^{k+1}$ .  $\square$

On fait comme hypothèses de récurrence que pour  $m \leq n-1$ ,  $Z_m$  est solution de l'équation différentielle

$$\frac{dZ_m}{dX} = f_1(X, \varepsilon', Y(X, \varepsilon'), Y_0(X)) Z_m + G_m(X, \varepsilon', Y(X, \varepsilon'), Y_0(X), Z_{m-1}(X, \varepsilon'))$$

où  $G_m(X, \varepsilon', y, y_0, Z)$  est un élément de  $\mathcal{G}_{m-2}^{p+m-1}(Z_{m-1})$ . La croissance de la fonction  $Z_m$  est majorée :  $X^{-m+1} Z_m(X, \varepsilon')$  est bornée dans  $\mathcal{D}_{C\mu}$ . Il existe alors pour tout  $m \leq n-1$  une unique fonction  $Y_m$  solution de

$$\frac{dY_m}{dX} = f_1(X, 0, Y_0(X), Y_0(X)) Y_m + G_m(X, 0, Y_0(X), Y_0(X), Y_{m-1})$$

telle que  $X^{-m+1} Y_m(X)$  est bornée ( $Y_m \in \mathcal{F}_{m-1}$ ).

Avec ces hypothèses, on pose

$$Z_{n-1}(X, \varepsilon') = Y_{n-1}(X) + \varepsilon' Z_n(X, \varepsilon').$$

On remplace  $Z_{n-1}$  par cette expression dans son équation différentielle (on ne notera plus les dépendances de  $Y(X, \varepsilon')$  et  $Y_0(X)$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{dZ_n}{dX} = & f_1(X, \varepsilon', Y, Y_0) Z_n + \frac{f_1(X, \varepsilon', Y, Y_0) - f_1(X, 0, Y_0, Y_0)}{\varepsilon'} Z_{n-1} \\ & + \frac{G_{n-1}(X, \varepsilon', Y, Y_0, Z_{n-2}) - G_{n-1}(X, 0, Y_0, Y_0, Y_{n-2})}{\varepsilon'}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

On veut étudier la croissance de la fonction  $G_n$  où l'on pose

$$\begin{aligned} G_n(X, \varepsilon', Y, Y_0, Z_{n-1}) = & \frac{f_1(X, \varepsilon', Y, Y_0) - f_1(X, 0, Y_0, Y_0)}{\varepsilon'} Z_{n-1} \\ & + \frac{G_{n-1}(X, \varepsilon', Y, Y_0, Z_{n-2}) - G_{n-1}(X, 0, Y_0, Y_0, Y_{n-2})}{\varepsilon'} \end{aligned} \quad (3.13)$$

L'hypothèse de récurrence est donc que  $G_{n-1} \in \mathcal{G}_{n-3}^{p+n-2}(Z_{n-2})$ .

Si on applique le lemme 5 à  $\frac{f_1(X, \varepsilon', Y, Y_0) - f_1(X, 0, Y_0, Y_0)}{\varepsilon'}$ , en considérant  $f_1$  comme élément de  $\mathcal{G}_0^p(Z_1)$ , on voit que cette fraction est dans la classe  $\mathcal{G}_{n-2}^{p+1}(Z_{n-1})$ ; en multipliant encore par  $Z_{n-1}$ , on se retrouve, d'après le lemme 4 (propriété 2), dans  $\mathcal{G}_{n-2}^{p+n-1}(Z_{n-1})$ .

Quant à  $\frac{G_{n-1}(X, \varepsilon', Y, Y_0, Z_{n-2}) - G_{n-1}(X, 0, Y_0, Y_0, Y_{n-2})}{\varepsilon'}$ , le lemme 5 nous indique qu'il s'agit d'une fonction de  $\mathcal{G}_{n-3+1}^{p+n-2+1}(Z_{n-1})$ , soit  $\mathcal{G}_{n-2}^{p+n-1}(Z_{n-1})$ .

Par conséquent,  $G_n(X, \varepsilon', Y, Y_0, Z_{n-1}) \in \mathcal{G}_{n-2}^{p+n-1}(Z_{n-1})$ .

On applique maintenant la formule de variation de la constante pour l'équation différentielle (3.12) concernant  $Z_n$  :

$$Z_n(X, \varepsilon') = Z_n(x_\rho \varepsilon'^{\mu-1}, \varepsilon') + \int_{\Gamma_X^\mu} e^{F_1(X) - F_1(t)} G_n(t, \varepsilon', Y(t, \varepsilon'), Y_0(t), Z_{n-1}(t, \varepsilon')) dt, \quad (3.14)$$

avec  $F_1(t) = \int^t f_1(u, \varepsilon', Y(u, \varepsilon'), Y_0(u)) du$ . Le chemin  $\Gamma_X^\mu$  est lui déduit du chemin  $\Gamma_X$ , à l'intérieur du domaine  $\mathcal{D}_{C\mu}$ , descendant entre un point  $x_\rho \varepsilon'^{\mu-1}$  (au lieu de  $x_\rho \varepsilon'^{-1}$  pour  $\Gamma_X$ ) et  $X$ .

On en déduit que

$$\begin{aligned}
|Z_n(X, \varepsilon')| &\leq \sup_{X \in \mathcal{D}_{C\mu}} \left| \frac{G_n(X, \varepsilon', Y(X, \varepsilon'), Y_0(X), Z_{n-1}(X, \varepsilon'))}{f_1(X, \varepsilon', Y(X, \varepsilon'), Y_0(X, \varepsilon'))} \right| \\
&\leq \sup_{X \in \mathcal{D}_{C\mu}} |X|^{(n-1)} + |Z_n(x_\rho \varepsilon'^{\mu-1}, \varepsilon')| \\
&\leq |\varepsilon'|^{-(n-1)\mu}. \quad \square
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Cependant, cette démonstration doit encore être complétée : il reste à montrer que la condition initiale que l'on choisit égale à

$$Z_n(x_\rho \varepsilon'^{\mu-1}, \varepsilon') = \frac{1}{\varepsilon'^n} \left( \varepsilon y(x_\rho \varepsilon'^\mu, \varepsilon) - Y_0(x_\rho \varepsilon'^{\mu-1}) - \dots - \varepsilon'^{n-1} Y_{n-1}(x_\rho \varepsilon'^{\mu-1}) \right)$$

pour assurer la continuité entre solution intérieure et extérieure n'est pas plus grande que les autres termes de l'inégalité (3.15). Cette propriété sera démontrée au paragraphe suivant (corollaire 16) ; pour le montrer il faudra chercher à étendre le domaine de la solution extérieure.

On remarque que l'on construit avec cette démonstration du corollaire une solution formelle  $\hat{Y}(X, \varepsilon')$  pour l'équation (II), qui a une propriété ressemblant à celle d'une série asymptotique pour la vraie solution  $Y(X, \varepsilon')$ . Mais si on ne contrôle leur croissance de manière intéressante que dans  $\mathcal{D}_{C\mu}$ , tous les coefficients  $Y_n(X)$  existent dans le même domaine que  $Y_0(X)$ , c'est-à-dire pour  $X \in \mathcal{D}_\infty$ .

Comme l'équation (II) n'est pas singulièrement perturbée, on peut encore compléter le théorème 12 et son premier corollaire avec le corollaire suivant :

**Corollaire 14 (Principe de prolongement analytique)** *En plus de l'ensemble des hypothèses du théorème 12, supposons que la fonction  $Y_0$  existe non seulement sur  $\mathcal{D}_C$ , mais peut être prolongée dans un domaine, accessible ou non,  $\mathcal{D}_P \subset \mathcal{D}_0$ , où  $\mathcal{D}_P$  est un domaine borné, tel que  $\mathcal{D}_P \cap \mathcal{D}_C \neq \emptyset$ . On suppose aussi que toutes les fonctions  $g$ ,  $h$  et  $P$  ont un prolongement analytique dans ce domaine. Il existe alors une solution  $Z(X, \varepsilon')$  holomorphe sur  $\mathcal{D}_P$  qui est un prolongement de la solution  $Y(X, \varepsilon')$  du théorème 12. Cette solution admet  $\hat{Y}$  comme développement asymptotique uniforme sur  $\mathcal{D}_P$ . Dans le domaine  $\mathcal{D}_P \cup \mathcal{D}_C$ , cette solution prolongée  $Y(X, \varepsilon')$  tend uniformément vers  $Y_0(X)$  quand  $\varepsilon'$  tend vers 0 et vérifie encore le corollaire 13.*

*En particulier, si  $0 \in \mathcal{D}_P$ , on peut prolonger les solutions correspondantes de (I),  $y(x, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} Y(x/\varepsilon', \varepsilon)$ , jusqu'à un voisinage de  $x = 0$ . Ce voisinage, cependant, n'est que de taille  $\varepsilon^{1/(p+1)}$  autour de 0.*

*Par ailleurs si on est sûr que  $y$  n'est pas exponentiellement grande (en  $\varepsilon$ ) dans ce voisinage, elle est a priori de taille  $1/\varepsilon$ .*

La démonstration de ce corollaire ne pose pas de problème.

Soit  $X_0$  un point de  $\mathcal{D}_P \cap \mathcal{D}_C$ . D'après le théorème, on a une solution holomorphe  $Y(X, \varepsilon)$  sur  $\mathcal{D}_C$ , prolongeant  $y(x, \varepsilon)$ , et en particulier,  $Y(X_0, \varepsilon')$  est bien défini. L'équation (II), régulièrement perturbée, a une solution holomorphe sur  $\mathcal{D}_P$ , avec la condition initiale  $Z(X_0, \varepsilon') = Y(X_0, \varepsilon')$ . Cette solution admet un développement asymptotique  $\sum Z_n \varepsilon'^n$ , qui est nécessairement égal à la série formelle  $\hat{Y}$ , par construction : les  $Y_n$  et  $Z_n$  sont définies par récurrence comme solutions d'équations différentielles (les mêmes pour  $Y_n$  et  $Z_n$ , quel que soit  $n$ ) et ces fonctions admettent la même condition initiale en  $X_0$ , donc  $Y_N = Z_N$ . Par unicité,  $Z$  est bien entendu un prolongement de  $Y$ .

### 3.2.4 Connexion des développements asymptotiques

On conserve dans ce paragraphe toutes les hypothèses des paragraphes précédents.

En regardant alors le résultat du théorème 11 et du corollaire 13, on s'aperçoit qu'on n'a pas, pour l'instant, de moyen de donner une bonne estimation de la solution  $y(x, \varepsilon)$  trouvée pour certains  $x$  au voisinage de 0 :  $|\varepsilon'|^{1-\mu} < |x| < |x_\rho|$ . Or on aimerait avoir une telle estimation partout où la solution est définie.

Nous allons voir que la solution formelle extérieure reste un développement asymptotique de la solution pour ces  $x$ , en adaptant les démonstrations du paragraphe 3.2.1. Les hypothèses  $H_{\rightarrow 0}$  nous indiquent que si  $|x| > |\varepsilon'|^\nu$ ,  $0 < \nu < 1$ ,

$$\begin{aligned} |g(x, \varepsilon)| &< B_g |\varepsilon'|^{-\nu} \\ |h(x, \varepsilon)| &< B_h |\varepsilon'|^{-\nu} \end{aligned}$$

puis, comme  $f$  est bornée en 0 et que  $h(x, 0)$  peut être d'ordre  $1/x$  en  $x = 0$ ,

$$|y_0(x)| = \left| \frac{h(x, 0)}{x^p f(x)} \right| < B_y |\varepsilon|^{-\nu}$$

On reprend les mêmes définitions pour les espaces et les normes associées, et pour les opérateurs entre ces espaces, qu'à la page 55, sauf que tout est cette fois défini pour  $x$  dans le domaine

$$\mathcal{D}_\nu^\kappa = \left\{ x \in \mathcal{D}_0 \mid \frac{x}{\varepsilon'} = X \in \mathcal{D}_C \text{ et } \kappa |x_\rho| > |x| > \frac{1}{\kappa} |\varepsilon'|^\nu \right\}$$

Dans un tel domaine, les majorations pour les fonctions dérivées seront les suivantes (quelles que soient les normes choisies sur des espaces de fonctions holomorphes) :

- si  $|f(x)| < A$  pour tout  $x \in \mathcal{D}_\nu^\kappa$ , alors dans tout domaine  $\mathcal{D}_\nu^\varkappa$  ( $\varkappa < \kappa$ ), et pour un certain  $B > A$ ,  $\|f'(x)\| < \frac{B}{|\varepsilon'|^\nu}$ . Il ne s'agit là que d'un cas particulier de la formule de Cauchy.

► si pour tout  $\nu$ ,  $\varepsilon^m |h(x, \varepsilon)| < A$ , pour tout  $x \in \mathcal{D}_\nu^\kappa$  et  $\varepsilon$  assez petit, alors on peut majorer la différence  $h(x, \varepsilon) - h(x, 0)$  :  $\left\| \varepsilon^m \frac{h(x, \varepsilon) - h(x, 0)}{\varepsilon} \right\| < \frac{A}{|\varepsilon|^\nu}$ . En effet, loin de  $x = 0$ ,  $h$  est holomorphe en  $x$  et admet un développement asymptotique en  $\varepsilon$  uniforme en  $x$ , ce qui fait que  $(h(x, \varepsilon) - h(x, 0))$  est borné par  $C\varepsilon$  ; au voisinage de  $x = 0$ , où  $h$  peut avoir un pôle, on ne considère que la partie polaire de son développement, qui nous empêche d'avoir le même résultat :

$$h_{\text{polaire}}(x, \varepsilon) = \frac{h_{-1}}{x} + \dots + fh_{-n}x^n + \varepsilon \left( \frac{h_{-n-1}}{x^{n+1}} + \dots + \frac{h_N}{x^N} \right) + \dots$$

Ici  $n$  est tel que  $n\nu \leq m(p+1)$  pour tout  $\nu < 1$ , donc  $n = m(p+1)$ , et  $N$  doit être tel que  $N\nu \leq (p+1) + m(p+1)$ , donc  $N = n + p + 1$  ; en continuant, on peut avoir dans  $h_{\text{polaire}}$  des termes en  $\varepsilon^2 x^{-2p-2-n}$ , etc ... En calculant alors la différence  $h(x, \varepsilon) - h(x, 0)$ , on trouve alors le résultat, qui est vrai pour toute fonction  $h$  vérifiant la condition.

**Note** : Dans tout le reste de ce paragraphe, on omettra de noter les constantes  $\kappa > 1$  successives décroissantes qui interviendront, et les constantes multiplicatives A, B, etc.

On obtient comme majorations

$$\begin{aligned} \|g\|_{\mathfrak{H}} &= \sup_{x \in \mathcal{D}_\nu} \left| \frac{g(x, \varepsilon)}{x^p f(x)} \right| < |\varepsilon|^{-\nu} \\ \|h\|_{\mathfrak{H}} &< |\varepsilon|^{-\nu} \\ \|y_0\| &< |\varepsilon|^{-\nu} \end{aligned}$$

et aussi

$$\|y'_0\|_{\mathfrak{H}} < \frac{|\varepsilon|^{-\nu}}{|\varepsilon'|^\nu} |\varepsilon'|^{-p\nu} = |\varepsilon|^{-2\nu}$$

alors que

$$\|P\|_{\mathfrak{H}} \text{ reste bornée quand } \varepsilon \text{ tend vers } 0.$$

Cela va nous permettre de montrer le théorème suivant, qui prolonge le théorème 11 :

**Théorème 15** *Si les hypothèses  $H_{\rightarrow 0}$  et celles du théorème 11 sont vérifiées, alors pour tout  $\nu \in ]0, 1[$ , la solution  $y(x, \varepsilon)$  et la solution formelle  $\hat{y}$  sont reliées dans le domaine  $\mathcal{D}_\nu^1$  (défini ci-dessus) par la relation :*

$$\left| y(x, \varepsilon) - \sum_{n=0}^N y_n(x) \varepsilon^n \right| \leq C_N |\varepsilon|^{(N+1)} |\varepsilon|^{-(N+2)\nu}$$

Nous commencerons par démontrer le cas  $N = 0$ , en reprenant effectivement les mêmes opérateurs que ceux qu'on trouve en page 55.

Alors, si  $\|z_k\| < |\varepsilon|^{-2\nu}$ , ( $\varepsilon^2 z_k$  continue heureusement à rester aussi petit que nécessaire), on obtient d'abord l'inégalité suivante, déduite de (3.1) :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}(z_1) - \mathcal{H}(z_2)\| &\leq |\varepsilon| \cdot \|z_1 - z_2\| \times \\ &\quad \left( \|g\|_{\mathfrak{H}} + 2(\|y_0\| + |\varepsilon|\|z_k\|) \cdot \|P\|_{\mathfrak{H}} + |\varepsilon|(|\varepsilon|\|z_k\| + \|y_0\|)^2 C \|P\|_{\mathfrak{H}} \right) \\ &\leq |\varepsilon| \left[ |\varepsilon|^{-\nu} + (|\varepsilon|^{-\nu} + |\varepsilon|^{1-2\nu}) + |\varepsilon|(|\varepsilon|^{-\nu} + |\varepsilon|^{1-2\nu})^2 \right] \|z_1 - z_2\| \\ \|\mathcal{H}(z_1) - \mathcal{H}(z_2)\| &\leq (|\varepsilon|^{1-\nu} + |\varepsilon|^{2-2\nu} + |\varepsilon|^{4-4\nu}) \|z_1 - z_2\|, \end{aligned}$$

et on garde pour l'autre opérateur l'inégalité (3.2), indépendante de  $\varepsilon$ , vraie quelles que soient les normes des  $H_k$

$$\|\mathcal{Z}(H_1) - \mathcal{Z}(H_2)\| \leq M \|H_1 - H_2\|_{\mathfrak{H}}$$

ce qui permet d'envisager que la combinaison des deux opérateurs soit contractante, si les espaces d'arrivée sont bien les bons. Or, si  $\|z\| < |\varepsilon|^{-2\nu}$ , d'après (3.3)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}(z)\|_{\mathfrak{H}} &\leq |\varepsilon| \cdot \|z\| \cdot \|g\|_{\mathfrak{H}} + \|y_0 + \varepsilon z^2\| \cdot \|P\|_{\mathfrak{H}} \\ &< |\varepsilon| \cdot |\varepsilon|^{-2\nu} \cdot |\varepsilon|^{-\nu} + |\varepsilon|^{-\nu} \\ &< |\varepsilon|^{1-3\nu} + |\varepsilon|^{-\nu} \\ &< \sup(|\varepsilon|^{-\nu}, |\varepsilon|^{1-3\nu}) \end{aligned}$$

et dans l'autre sens, si  $\|H\|_{\mathfrak{H}} < \sup(|\varepsilon|^{-\nu}, |\varepsilon|^{1-3\nu})$ , on reprend l'inégalité (3.4)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Z}(H)\| &\leq M \left\| y_0 g - y'_0 + \frac{h(x, \varepsilon) - h(x, 0)}{\varepsilon} \right\|_{\mathfrak{H}} + M \|H\|_{\mathfrak{H}} \\ &< \left( |\varepsilon|^{-\nu} |\varepsilon|^{-\nu} + |\varepsilon|^{-2\nu} + |\varepsilon|^{-\nu} |\varepsilon|^{-\nu} \right) + \left( |\varepsilon|^{-\nu} + |\varepsilon|^{1-3\nu} \right) \\ &< |\varepsilon|^{-2\nu} \end{aligned}$$

Ce qui permet d'appliquer effectivement le théorème du point fixe et de démontrer le théorème 15 pour le cas  $N = 0$ .

Pour le cas général, la méthode est exactement la même que pour le théorème 11 ; on obtient les mêmes équations pour les  $R_n$ , la seule différence est que les fonctions ne sont plus bornées indépendamment de  $\varepsilon$ , mais sont bornées par une

puissance de  $\varepsilon$ . Ainsi, en reprenant les notations de la démonstration,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{h_1(x, \varepsilon)}{x^p f} \right\| &\leq \|y_0\| \cdot \|g\|_{\mathfrak{H}} + \left\| \frac{y'_0}{x^p f} \right\| + \left\| \sup_{\varepsilon} \frac{h(x, \varepsilon) - h(x, 0)}{\varepsilon} \right\|_{\mathfrak{H}} + \|y\|^2 \cdot \|P\|_{\mathfrak{H}} \\ &< |\varepsilon|^{-\nu} |\varepsilon|^{-\nu} + |\varepsilon|^{-2\nu} + |\varepsilon|^{-\nu} \sup \left( |\varepsilon|^{-\nu}, |\varepsilon|^{1-3\nu} \right) + |\varepsilon|^{-2\nu} \\ \|h_1\|_{\mathfrak{H}} &< |\varepsilon|^{-2\nu}. \end{aligned}$$

Comme  $R_1$  vérifie l'équation

$$\varepsilon R'_1 = (x^p f + \varepsilon g) R_1 + h_1$$

on voit que  $\|R_1\| < |\varepsilon|^{-2\nu}$  et  $\|y_1\| < |\varepsilon|^{-2\nu}$ , puis avec  $\varepsilon R_2 = R_1 - y_1$ ,

$$\|R_2(x, \varepsilon)\| < \|h_2\|_{\mathfrak{H}} = \|h_1\|_{\mathfrak{H}} + \|g\|_{\mathfrak{H}} \|y_1\| < |\varepsilon|^{-3\nu}.$$

Par récurrence on arrive alors sans difficulté au résultat complet du théorème, puisqu'on aura toujours

$$h_n(x, \varepsilon) = \frac{h_{n-1}(x, \varepsilon) - h_{n-1}(x, 0)}{\varepsilon} - g(x, \varepsilon) y_{n-1}(x)$$

et

$$\|R_n(x, \varepsilon)\| \leq \|h_n\|_{\mathfrak{H}}, \text{ comme } \|y_n(x)\| = \|h_n\|_{\mathfrak{H}}.$$

Ce théorème de prolongement de la solution extérieure va nous permettre de finir la démonstration du paragraphe précédent, en assurant la connexion à tous les niveaux  $n$  entre la série formelle intérieure  $\sum Y_n(x/\varepsilon')\varepsilon'^n$  et la série formelle extérieure  $\sum y_n(x)\varepsilon^n$ . Nous appellerons cela le

**Corollaire 16** *Soit  $N$  un entier positif et  $\mu \in ]0, 1[$ . Si les  $N$  premiers termes de la série  $(Y_0(X), Y_1(X), \dots, Y_{N-1}(X))$  construite au corollaire 13 existent et sont majorées jusqu'à l'ordre  $N-1$  comme le prévoit ce corollaire, alors on a encore*

$$\left| Y \left( x_{\rho} \varepsilon'^{\mu-1}, \varepsilon' \right) - \sum_{n=0}^N Y_n(x_{\rho} \varepsilon'^{\mu-1}) \varepsilon'^n \right| \leq |\varepsilon'|^{N+1} |\varepsilon'|^{-N(1-\mu)},$$

où  $Y_N(X) = \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} Z_N(X, \varepsilon')$ .

Il est clair que ce théorème suffit à compléter la démonstration par récurrence du corollaire 13, puisque la condition initiale pour  $Z_{N+1}$  (qui correspond au premier membre divisé par  $\varepsilon'^{N+1}$ ) a alors au plus la même taille que celle prévue pour la fonction elle-même.

Soit  $\nu < \mu$ , avec pourtant  $\nu$  peu différent de  $\mu$ . Il est possible d'écrire pour tout  $n \geq 0$ , d'après le théorème 15 (on rappelle que  $\varepsilon'^{p+1} = \varepsilon$ ).

$$\begin{aligned} Y \left( x_{\rho} \varepsilon'^{\mu-1}, \varepsilon' \right) &= \varepsilon y \left( x_{\rho} \varepsilon'^{\mu}, \varepsilon \right) \\ &= \varepsilon y_0 \left( x_{\rho} \varepsilon'^{\mu} \right) + \varepsilon^2 y_1 \left( x_{\rho} \varepsilon'^{\mu} \right) + \dots + \varepsilon^{n+1} y_n \left( x_{\rho} \varepsilon'^{\mu} \right) + o \left( \varepsilon^{(n+1)-(n+2)\nu} \right) \end{aligned}$$

On décomposera  $y$  jusqu'à un  $n_0$  tel que  $(n_0 + 1) - (n_0 + 2)\mu > (N + 1) - N(1 - \mu)$ .

On connaît une majoration des  $y_k$  sur  $\mathcal{D}_\nu$  :

$$|\varepsilon^k y_k(x_\rho \varepsilon'^\nu)| \leq |\varepsilon'|^{-(p+1)(k+1)\nu}.$$

Donc les  $y_k(x)$ , qui sont indépendants de  $\varepsilon$ , ont en  $x = 0$  au plus un pôle d'ordre  $(k + 1)(p + 1)$ . Autrement dit,  $y_k$  (pour tout  $k \leq n$ ) qui est méromorphe en 0 comme toutes les fonctions de l'équation (I), s'écrit aussi, au voisinage de 0

$$y_k(x) = y_{k, -(k+1)(p+1)} x^{-(k+1)(p+1)} + y_{k, -(k+1)(p+1)+1} x^{-(k+1)(p+1)+1} + \dots + y_{k,0} + \dots$$

L'hypothèse (de récurrence) principale du corollaire est

$$\left| Y(x_\rho \varepsilon^{\mu-1}, \varepsilon') - \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon'^k Y_k(x_\rho \varepsilon'^{\mu-1}) \right| < |\varepsilon'|^N |\varepsilon'|^{(\mu-1)(N-1)},$$

qui implique

$$\left| \varepsilon \sum_{k=0}^{n_0} \varepsilon^k y_k(x_\rho \varepsilon'^\mu) - \sum_{l=0}^{N-1} \varepsilon'^l Y_l(x_\rho \varepsilon'^{\mu-1}) \right| < |\varepsilon'|^N |\varepsilon'|^{(\mu-1)(N-1)}.$$

Le premier membre de l'inégalité ci-dessus correspond aussi à

$$\varepsilon'^N Z_N(x_\rho \varepsilon'^{\mu-1}, \varepsilon') + o(|\varepsilon'|^N |\varepsilon'|^{(\mu-1)(N-1)})$$

par définition de  $Z_N$ , qui est majorée dans  $\mathcal{D}_{C\mu}$ , d'après l'hypothèse de récurrence. On peut en déduire une définition de  $Y_N(x_\rho \varepsilon'^{\mu-1})$  à un  $o(|\varepsilon'|^{(\mu-1)(N-1)})$  près. En  $X$ , formellement, on a d'abord

$$Y_N(X) = \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon'^N} \left( Y(X, \varepsilon') - \sum_{k \leq N-1} \varepsilon'^k Y_k(X) \right).$$

Puis,

$$\begin{aligned} \varepsilon'^N Y_N(X) &= \text{Terme d'ordre } \varepsilon'^N \text{ dans } \sum_{k \geq 0} \varepsilon^{k+1} y_k(X \varepsilon') \\ &= \text{Terme d'ordre } \varepsilon'^N \text{ dans } \sum_{k \geq 0} \varepsilon^{k+1} \sum_{l \geq 0} y_{k, l-(k+1)(p+1)} X^{l-(k+1)(p+1)} \frac{\varepsilon'^l}{\varepsilon^{k+1}} \end{aligned}$$

ce qui mène à

$$Y_N(X) \sim \sum_{k \geq 0} y_{k, N-(k+1)(p+1)} X^{N-(k+1)(p+1)} :$$



comme  $Y_N$  est solution d'une équation différentielle avec une irrégularité singulière en l'infini, on sait que ce développement formel est effectivement un développement asymptotique pour  $Y_N(X)$ .

D'où

$$Y_N \left( x_\rho \varepsilon'^{\mu-1} \right) = \sum_{k \leq n_0} y_{k, N-(k+1)(p+1)} \left( x_\rho \varepsilon'^{\mu-1} \right)^{N-(k+1)(p+1)} + o \left( |\varepsilon'|^{(\mu-1)(n_0-(k+1)(p+1))} \right).$$

On peut prendre  $n_0$  arbitrairement grand, donc dans la différence

$$\varepsilon \sum_{k=0}^{n_0} \varepsilon^k y_k \left( x_\rho \varepsilon'^{\mu} \right) - \sum_{l=0}^N \varepsilon'^l Y_l \left( x_\rho \varepsilon'^{\mu-1} \right)$$

il ne reste, à un  $o \left( |\varepsilon'|^{N+1} |\varepsilon'|^{(\mu-1)N} \right)$  près, qu'une somme finie de sommes convergentes :

$$\sum_{k \leq n_0} \left( \sum_{n > N-(k+1)(p+1)} \varepsilon^{k+1} y_{k,n} \left( x_\rho \varepsilon'^{\mu} \right)^n \right).$$

Or tous les termes de cette somme sont d'ordre, en  $\varepsilon'$ , au moins

$$\begin{aligned} & (k+1)(p+1) + \left( N+1 - (k+1)(p+1) \right) \mu \\ & = (k+1)(p+1)(1-\mu) + (N+1) + (N+1)(\mu-1) \\ & = (N+1) - N(1-\mu) + (1-\mu)(kp+p+k). \end{aligned}$$

Le dernier terme de cette expression étant strictement positif, l'ordre est supérieur à  $(N+1) - N(1-\mu)$ . Ce qui s'écrit

$$\left| Y \left( x_\rho \varepsilon'^{\mu-1}, \varepsilon' \right) - \sum_{k=0}^N \varepsilon'^k Y_k \left( x_\rho \varepsilon'^{\mu-1} \right) \right| < |\varepsilon'|^{N+1} |\varepsilon'|^{(\mu-1)N},$$

ce qu'on voulait démontrer.

### 3.3 Existence de solutions bornées jusqu'en $x = 0$

On reprend l'équation originale, en y introduisant explicitement un multi-paramètre :

$$\vec{\alpha}(\varepsilon) = \left( \alpha_0(\varepsilon), \dots, \alpha_i(\varepsilon), \dots, \alpha_{p-1}(\varepsilon) \right)$$

qu'on supposera avoir une série asymptotique

$$\vec{\alpha}(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} \vec{a}_n \varepsilon^n.$$

On notera aussi

$$\alpha(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{p-1} x^i \alpha_i(\varepsilon).$$

On considère donc un cas particulier de l'équation (I), qu'on écrira par exemple sous la forme

$$\varepsilon y' = (x^p f(x) + \varepsilon g(x, \varepsilon, \vec{\alpha}))y + h(x, \varepsilon, \vec{\alpha}) + \varepsilon y^2 P(x, \varepsilon, \vec{\alpha}, \varepsilon y) \quad (\text{III})$$

ou encore

$$\varepsilon y' = (x^p f(x) + \varepsilon g(x, \varepsilon))y + h(x, \varepsilon) + \varepsilon y^2 P(x, \varepsilon, \varepsilon y) + Q(x, \varepsilon, \vec{\alpha}, y), \quad (\text{III}')$$

où on suppose que  $Q$  comporte les termes suivants :

$$\begin{aligned} Q(x, \varepsilon, \vec{\alpha}, y) = & \alpha(x, \varepsilon) R_0(x) + \varepsilon R_1(x, \varepsilon, \vec{\alpha}) + \varepsilon y R_2(x, \varepsilon, \vec{\alpha}) \\ & + \varepsilon y^2 R_3(x, \varepsilon, \vec{\alpha}, \varepsilon y) + x^p R_4(x, \varepsilon, \vec{\alpha}), \end{aligned} \quad (3.16)$$

avec  $R_0(0) \neq 0$ . Les deux premiers termes sont issus de  $h$ , qui doit donc avoir une forme particulière ; les termes  $R_2$  et  $R_3$  viennent de  $g$  et  $P$  respectivement, dans le cas le plus général.

Comme on va s'intéresser maintenant à des solutions  $y(x, \varepsilon)$  qui soient bornées sur un voisinage entier de 0, il paraît nécessaire que cette fois toutes les fonctions qui interviennent dans l'équation soient holomorphes en  $x = 0$ .

Nous allons dans cette partie tenter de montrer que, dans certaines conditions, il existe de vraies solutions d'une équation différentielle qui existent jusque dans un voisinage d'un point tournant. Pour cela, nous allons montrer que les vraies solutions qui existent sur des montagnes (cf. 3.2.1) peuvent parfois être prolongées jusqu'au point tournant, en se servant des résultats du paragraphe 3.2.2. Ensuite, en jouant sur un (multi-)paramètre, on fera en sorte que ces différents prolongements aient la même valeur en  $x = 0$  ; cela signifiera que tous ces prolongements correspondent à une seule solution de l'équation, qui existera donc sur la réunion des domaines d'existence de ces solutions.

### 3.3.1 Existence d'une solution formelle continue en 0

Dans le cas où l'équation (III') dépend linéairement de  $\alpha(x, \varepsilon)$ , elle peut se réécrire

$$\varepsilon y' = (x^p f(x) + \varepsilon g(x, \varepsilon))y + h(x, \varepsilon) + \varepsilon y^2 P(x, \varepsilon, \varepsilon y) + \alpha(x, \varepsilon)Q(x, \varepsilon, y) \quad (3.17)$$

Dans ce cas précis, on peut montrer qu'il existe une solution formelle à l'équation qui est continue en 0, à condition que  $Q(0, 0, 0)$  soit non nul. Nous allons montrer que l'équation (3.17) possède une unique solution formelle  $(\hat{y}, \hat{a})$  qui s'écrit comme série formelle

$$\hat{y} = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n y_n(x) \quad \text{et} \quad \hat{a} = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n a_n(x), \quad a_n(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{k,n} x^k,$$

où les  $y_n$  eux-mêmes sont des fonctions de  $x$  qui sont soit holomorphes en  $x$ , soit au moins admettent, quand  $x$  tend vers 0, une série asymptotique bornée en 0, notée  $\hat{y}_n$ . Tous les  $a_n(x)$  sont, quant à eux, des polynômes de degré inférieur ou égal à  $p-1$  en  $x$ . Pour obtenir ce résultat, il suffit essentiellement de remplacer dans (3.17)  $y$  et les  $\alpha_k$  par leur série formelle, les fonctions holomorphes en  $\varepsilon$  :  $g$ ,  $h$  et  $P$  par leur série, puis d'identifier les coefficients de  $\varepsilon^n$ .

On écrira la fonction  $Q$  sous la forme

$$Q(x, \varepsilon, y) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x, y) \varepsilon^n,$$

et on décomposera de la même manière la fonction  $P(x, \varepsilon, \varepsilon y)$  par rapport à  $\varepsilon$ . Ce type de notation vaudra aussi pour  $h(x, \varepsilon)$  et  $g(x, \varepsilon)$ .

On commence pour  $n = 0$  par :

$$0 = x^p f(x) y_0(x) + h_0(x) + a_0(x) Q_0(x, y)$$

(on remarque que  $Q_0(x, y) = Q(x, 0, 0)$ ). D'où

$$y_0(x) = -\frac{h_0(x) + a_0(x) Q(x, 0, 0)}{x^p f(x)} \quad (3.18)$$

On souhaite que  $y_0$  soit continue en 0. Il faut et il suffit pour cela que la valuation de  $h_0(x) + a_0(x) Q(x, 0, 0)$  soit supérieure ou égale à  $p-1$ . Ce sera effectivement le cas si (et seulement si) on choisit pour  $a_0(x)$  le polynôme obtenu par division des séries en  $x$  suivantes :  $-h_0(x)$  par  $Q(x, 0, 0)$ . Cela nous donne bien une et une seule valeur possible pour  $a_0$  puis  $y_0$ .

Supposons à présent que l'on ait montré l'existence (et l'unicité) des  $n$  premiers termes des séries  $\hat{y}$  et  $\hat{a}$ , donc regardé les coefficients de  $\varepsilon^k$  pour  $k \leq n-1$ . Alors, on obtient l'égalité suivante pour le coefficient de  $\varepsilon^n$  :

$$ny_{n-1}(x) = x^p f(x)y_n(x) + \sum_{k \leq n-1} g_k(x)y_{n-1-k}(x) + h_n(x) + P_{n-1}(x, y) + \sum_{k \leq n} a_k(x)Q_{n-k}(x, y)$$

On peut vérifier que  $P_{n-1}(x, y)$ , le coefficient de  $\varepsilon^{n-1}$  dans  $y^2 P(x, \varepsilon, \varepsilon y)$  ne dépend que de  $x$  et de  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ . De même,  $Q_k(x, y)$ , d'après la forme de  $Q$ , ne dépend que de  $x$  et de  $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ .

Cela permet de trouver

$$y_n = \frac{ny_{n-1} - \sum_{k \leq n-1} g_k(x)y_{n-1-k} + h_n(x) + P_{n-1}(x, y) + \sum_{k \leq n} a_k(x)Q_{n-k}(x, y)}{x^p f(x)}$$

Or l'expression

$$ny_{n-1} - \sum_{k \leq n-1} g_k(x)y_{n-1-k} + h_n(x) + P_{n-1}(x, y) + \sum_{k \leq n-1} a_k(x)Q_{n-k}(x, y)$$

peut s'écrire (au moins formellement) comme une série en  $x$  si on remplace tous les  $y_k$  pour  $k < n$  par leur série (formelle) respective. On choisit alors le polynôme  $a_n(x)$  tel que les  $p$  premiers termes du numérateur de la fraction ci-dessus soient nuls, i.e. que  $y_n$  reste bornée en  $x = 0$ , à nouveau en effectuant une division de séries.

Il existe un unique polynôme  $a_n$  de degré inférieur ou égal à  $p-1$  qui vérifie la propriété voulue, puis le  $y_n$  calculé est bien sûr unique lui aussi.

Nous pouvons ainsi construire des séries uniques  $\hat{a}$  et  $\hat{y}$ , solutions formelles de (3.17), telles que tous les coefficients de  $\hat{y}$  restent bornés quand  $x$  tend vers 0. En revanche, rien ne prouve l'existence pour tout  $\varepsilon$  assez petit d'une vraie solution  $y(x, \varepsilon), a(x, \varepsilon)$  à l'équation différentielle qui soit continue et bornée quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans un voisinage de 0.

Pour le cas non linéaire en  $\alpha$  de l'équation (III'), la méthode de construction est analogue, mais plus complexe. Cependant, dans le cas qui nous intéresse où  $Q$  peut s'écrire sous la forme (3.16), l'existence et l'unicité de la solution formelle  $(\hat{y}, \hat{\alpha})$  reste assurée (pour une démonstration complète, voir [4]).

### 3.3.2 Existence de vraies solutions holomorphes jusqu'en 0

**Théorème 17** *On suppose que pour l'équation (III), en plus des hypothèses du théorème 12, on a que les deux fonctions  $g$  et  $h$  sont holomorphes en 0. Alors il existe de vraies solutions  $(y, \alpha)$ , où  $\alpha$  s'écrit nécessairement  $\alpha(x, \varepsilon) = a_0(x) + a_1(x)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$  (les deux termes  $a_0$  et  $a_1$  étant imposés), telles que les  $y(x, \varepsilon)$  définies, bornées sur une montagne vérifient en plus les propriétés suivantes :*

1.  $y(0, \varepsilon)$  est définie et bornée quand  $\varepsilon$  tend vers 0.
2. De plus  $y(0, \varepsilon) - y(0, 0) = \mathcal{O}(\varepsilon)$  (ou  $o(\varepsilon)$ ).

D'après le théorème 12, il existe des solutions  $y(x, \varepsilon)$  de l'équation (III) dans des domaines tels que  $x > |X_l|\varepsilon'$ , ce qui ne permet pas encore de les définir en 0. Pour arriver jusqu'en 0, vu le corollaire 14, il faut encore que  $Y_0(X)$  puisse être prolongée holomorphiquement jusqu'en  $X = 0$ .

Or précisément, dans le cas qui nous intéresse, où  $g$  et  $h$  sont holomorphes en 0, on a vu que  $G_0(X) \equiv 0$  et  $H_0(X) \equiv 0$ . L'équation pour  $Y_0$  est alors particulièrement simple :

$$(3.5) \quad \frac{dY_0}{dX} = \left( X^p f(0) \right) Y_0 + Y_0^2 P_0(X, Y_0),$$

et la solution  $Y_0$  qui s'impose est une solution évidente : la fonction nulle, la seule solution de cette équation qui tend vers 0 en l'infini dans un très large secteur ; celle-ci existe bien sûr en  $X = 0$ , et on peut utiliser le corollaire 14 qui assure alors l'existence de  $y(x, \varepsilon)$  jusqu'en  $x = 0$ .

Mais ce résultat ne nous suffit pas, la solution  $y(x, \varepsilon)$  obtenue n'étant pas bornée quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Pour aller plus loin, il faut regarder exactement les premiers termes de la solution correspondante  $Y(X, \varepsilon')$ , que dans les limites du corollaire 13 on mettra sous la forme

$$Y(X, \varepsilon') \sim \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(X) \varepsilon'^n.$$

Montrons que les  $p+1$  premiers  $Y_n$  sont tous identiquement nuls.

On sait qu'on a une solution  $y_0(x)$  pour  $\varepsilon = 0$  qui est continue en  $x = 0$ . L'équation pour  $y_0$  nous donne

$$y_0(x) = -\frac{h(x, 0, \vec{a}_0)}{f(x)x^p}$$

donc  $h(x, 0, \vec{a}_0)$  est divisible par  $x^p$ . Si on pose  $\alpha = a_0 + \varepsilon \tilde{\alpha}$ , la fonction  $h$  peut se mettre sous la forme  $h(x, \varepsilon, \vec{\alpha}) = x^p h_1(x) + \varepsilon h_2(x, \varepsilon, \vec{\alpha})$ . Dans toute la suite,

on supposera qu'on a déjà écrit  $\vec{\alpha}$  sous cette forme et transformé  $g$ ,  $h$  et  $P$  en conséquence pour obtenir effectivement l'équation (III) :

$$\begin{aligned} \varepsilon y' = & (x^p f(x) + \varepsilon g(x, \varepsilon, \vec{\alpha}))y + x^p h_1(x) + \varepsilon h_2(x, \varepsilon, \vec{\alpha}) \\ & + \varepsilon y^2 \left( x^p P_1(x, \varepsilon y) + \varepsilon P_2(x, \varepsilon, \vec{\alpha}, \varepsilon y) \right) \quad (\text{III}) \end{aligned}$$

Le résultat pour l'équation en  $Y$ , (II), est le suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dX} = & \left( X^p f(\varepsilon' X) + \varepsilon' g(\varepsilon' X, \varepsilon, \vec{\alpha}) \right) Y \\ & + \varepsilon X^p h_1(\varepsilon' X) + \varepsilon' \varepsilon h_2(\varepsilon' X, \varepsilon, \vec{\alpha}) + Y^2 P_\varepsilon(X, \varepsilon', \vec{\alpha}, Y). \quad (3.19) \end{aligned}$$

Donc, par récurrence finie, en faisant l'hypothèse de récurrence  $Y_{n-1}(X) = 0$ , pour  $Y_n$ ,  $n$  allant de 0 à  $p$ , les équations sont équivalentes à

$$\frac{dY_n}{dX} = \left( X^p f(0) \right) Y_n.$$

La fonction nulle est la solution de chacune de ces équations qui vérifie la condition initiale voulue ; c'est-à-dire, quand  $\varepsilon'$  tend vers 0,

$$Y_n \left( \frac{x_\rho \varepsilon'^\mu}{\varepsilon'} \right) = \frac{1}{\varepsilon'^n} \left( \varepsilon y(x_\rho \varepsilon'^\mu, \varepsilon) - \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon'^k Y_k \left( \frac{x_\rho \varepsilon'^\mu}{\varepsilon'} \right) \right) :$$

quand  $\varepsilon$  tend vers 0,  $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'^p} y(x_\rho \varepsilon'^\mu, \varepsilon)$  tend vers 0 et les autres termes à droite sont nuls par hypothèse de récurrence, d'où la condition

$$\lim_{X \rightarrow \infty} Y_n(X) = 0, \quad \forall n \leq p.$$

Pour  $n = p + 1$ , on obtient en revanche

$$\frac{dY_{p+1}}{dX} = \left( X^p f(0) \right) Y_{p+1} + X^p h_1(0)$$

dont la solution qui nous intéresse vérifie

$$\lim_{X \rightarrow \infty} Y_{p+1}(X) = \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} y_0(x \varepsilon'^\mu) + o\left(\varepsilon'^{1-\mu}\right) = y_0(0)$$

c'est-à-dire

$$Y_{p+1}(X) = -\frac{h_1(0)}{f(0)}.$$

On en conclut que  $Y(X, \varepsilon')$  est égal à

$$Y(X, \varepsilon') = \varepsilon \tilde{Y}(X, \varepsilon') \sim \varepsilon(Y_{p+1}(X) + \varepsilon' Y_{p+2}(X) + \dots),$$

d'où l'on déduit que

$$y(\varepsilon' X, \varepsilon) = \frac{Y(X, \varepsilon')}{\varepsilon} = \tilde{Y}(X, \varepsilon')$$

reste bornée en  $x = 0$  (et dans un petit voisinage de taille  $\varepsilon'$  autour de ce point) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ; ce qui démontre le premier point du théorème.

Il reste à montrer que l'équivalent de  $y(0, \varepsilon) - y(0, 0)$  est d'ordre  $\varepsilon$  au moins. On continue dans ce but le calcul des premiers termes de la série formelle de  $\tilde{Y}$ .

Revenons d'abord à l'équation (III). Comme il existe une solution formelle, on sait calculer  $y_1(x)$  avec l'équation suivante :

$$y'_0(x) = x^p f(x) y_1(x) + h_2(x, 0, a_1(x)) + y_0^2(x) x^p P_1(x, 0) + y_0(x) g(x, 0, 0),$$

donc pour que  $y_1$  soit continue en 0, il faut et il suffit que

$$y'_0(x) - h_2(x, 0, a_1) - y_0(x) g(x, 0, 0) \text{ soit de valuation } p \text{ au moins.} \quad (3.20)$$

Pour  $\tilde{Y}$ , on trouve comme équation différentielle non singulièrement perturbée

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{Y}}{dX} = & \left( X^p f(\varepsilon' X) + \varepsilon' g(\varepsilon' X, \varepsilon, \varepsilon \tilde{\alpha}) \right) \tilde{Y} + X^p h_1(\varepsilon' X) + \varepsilon' h_2(\varepsilon' X, \varepsilon, \tilde{\alpha}) \\ & + \varepsilon \tilde{Y}^2 P_\varepsilon(X, \varepsilon', \tilde{\alpha}, \tilde{Y}) \end{aligned}$$

On ne cherche que les termes  $\tilde{Y}_0, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_p$ , donc dans l'équation ci-dessus, on tronquera toutes les séries pour ne garder que les termes de degré en  $\varepsilon'$  strictement inférieur à  $p + 1$ . En particulier, le terme  $\varepsilon \tilde{Y}^2 P_\varepsilon(X, \varepsilon', \tilde{\alpha}, \tilde{Y})$  peut être oublié, et on obtient pour ces fonctions  $\tilde{Y}_j$  des équations différentielles linéaires.

Si on cherche à identifier les deux séries formelles, celle pour  $y$  et celle pour  $\tilde{Y}$ , on s'aperçoit que les  $\tilde{Y}_j$  (pour  $j \leq p$ ) ne devraient dépendre que de  $y_0$ , et être de la forme  $\tilde{Y}_j = \lambda_j X^j$ . Nous allons démontrer que les équations pour les  $\tilde{Y}_j$  admettent effectivement de telles solutions. À partir de l'équation pour  $\tilde{Y}$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p \lambda_j j X^{j-1} \varepsilon'^j \equiv & \left( X^p f(\varepsilon' X) + \varepsilon' g(\varepsilon' X, 0, 0) \right) \sum_{j=1}^p \lambda_j X^j \varepsilon'^j \\ & + X^p h_1(\varepsilon' X) + \varepsilon' h_2(\varepsilon' X, 0, a_1) \quad [\text{mod } \varepsilon'^{p+1}], \end{aligned}$$

en ne regardant dans l'égalité ci-dessus que les termes dont le degré en  $\varepsilon'$  est inférieur ou égal à  $p$ .

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \varepsilon' \left( \sum_{j=1}^p \lambda_j j X^{j-1} \varepsilon'^j - h_2(\varepsilon' X, 0, a_1) - g(\varepsilon' X, 0, 0) \sum_{j=1}^p \lambda_j X^j \varepsilon'^j \right) \\ \equiv X^p \left( f(\varepsilon' X) \sum_{j=1}^p \lambda_j X^j \varepsilon'^j + h_1(\varepsilon' X) \right) \quad [\text{mod } \varepsilon'^{p+1}]. \end{aligned}$$

À gauche, on ne dépasse pas le degré  $p-1$  en  $X$ , alors qu'à droite, on commence au degré  $p$ ; la seule possibilité d'avoir cette égalité est donc que les deux membres soient nuls.

À droite, cela donne (toujours en séries tronquées)

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j X^j \varepsilon'^j \equiv -\frac{h_1(\varepsilon' X)}{f(\varepsilon' X)} = y_0(\varepsilon' X) \quad [\text{mod } \varepsilon'^{p+1}]$$

puis à gauche, on retrouve

$$\varepsilon' \left( y'_0(\varepsilon' X) - h_2(\varepsilon' X, 0, a_1) - g(\varepsilon' X, 0, 0) y_0(\varepsilon' X) \right)$$

qui d'après la propriété (3.20) est de valuation  $p$  en  $\varepsilon' X$ , donc de valuation  $p+1$  en  $\varepsilon'$ .

Ces  $\tilde{Y}_j$  doivent vérifier en plus une condition initiale, qui est, quand  $\varepsilon'$  tend vers 0,

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_j \left( x_\rho \varepsilon'^{\mu-1} \right) &\sim \frac{1}{\varepsilon'^{p+1+j}} \left( \varepsilon y_0 \left( x_\rho \varepsilon'^\mu \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) - \sum_{k=0}^{j-1} \varepsilon'^k \tilde{Y}_k \left( x_\rho \varepsilon'^{\mu-1} \right) \right) \\ &\sim \frac{1}{\varepsilon'^j} y_0 \left( x_\rho \varepsilon'^\mu \right) - \sum_{k=0}^{j-1} \lambda_k \left( x_\rho \varepsilon'^\mu \right)^k \end{aligned}$$

soit, si  $y_0(x) = \sum \lambda_k x^k$ ,

$$\tilde{Y}_j \left( x_\rho \varepsilon'^{\mu-1} \right) \sim \lambda_j \left( x_\rho \varepsilon'^{\mu-1} \right)^j$$



Les solutions  $\tilde{Y}_j$  trouvées formellement sont donc bien aussi effectivement les solutions des équations différentielles correspondantes avec les conditions initiales voulues.

Pour  $y(x, \varepsilon)$ , on en déduit alors

$$\begin{aligned} y(\varepsilon' X, \varepsilon) &= \lambda_0 + \varepsilon' \lambda_1 X + \cdots + \varepsilon'^p \lambda_p X^p + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ y(0, \varepsilon) - y(0, 0) &\sim \varepsilon \tilde{Y}_{p+1}(0) \quad \text{voire plus petit, si } \tilde{Y}_{p+1}(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

### 3.3.3 Une estimation préliminaire

On étudiera dans la suite de cette partie l'équation (III') dans laquelle on a déjà écrit  $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_0 + \varepsilon \vec{\tilde{\alpha}}$ .

$$\varepsilon y' = (x^p f(x) + \varepsilon g(x, \varepsilon))y + h(x, \varepsilon) + \varepsilon y^2 P(x, \varepsilon, \varepsilon y) + Q(x, \varepsilon, \varepsilon \vec{\tilde{\alpha}}, y)$$

la fonction  $Q$  étant holomorphe en toutes ses variables ;  $Q$  s'écrit comme dans l'égalité (3.16).

On note encore  $Q_k^0 = R_0(0) \neq 0$ .

On notera  $\gamma_l$  un chemin descendant le relief à partir d'un sommet de la  $l$ -ième montagne jusqu'en  $x = 0$  (on rappelle qu'il naît  $p+1$  montagnes autour du point 0).

Nous aurons besoin plus loin de l'estimation suivante :

**Lemme 6** *Quand  $\varepsilon$  tend vers 0,*

$$\int_{\gamma_l} \exp \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_x^0 t^p f(t) dt + r(x) \right) \frac{\partial Q}{\partial \tilde{\alpha}_k}(x, \varepsilon, \varepsilon \vec{\tilde{\alpha}}, y) dx \sim \varepsilon C_k \varepsilon'^{k+1} \exp \left( l(k+1) \frac{2i\pi}{p+1} \right)$$

où  $C_k$  ne dépend pas de  $l$ .

Il ne s'agit dans ce lemme que d'un variante de la méthode du point col. La valeur de l'intégrale est essentiellement concentrée là où  $\int_x^0 t^p f(t) dt$  est nulle, c'est-à-dire en  $x = 0$ . Comme  $\exp(r(x))$  et  $f(x)$  sont holomorphes et non nulles au voisinage de  $x = 0$ , l'intégrale est peu différente de

$$\int_{\gamma_l} e^{r(x)} \exp \left( -\frac{1}{\varepsilon} x^{p+1} \frac{f(0)}{p+1} \right) \frac{\partial Q}{\partial \tilde{\alpha}_k}(x, \varepsilon, \varepsilon \vec{\tilde{\alpha}}, y) dx$$

et on effectue le changement de variable  $u = x \times \frac{p+1 \sqrt{f(0)/(p+1)}}{\varepsilon'}$ .

On arrive à l'estimation

$$e^{r(0)} \varepsilon'^{p+1} \sqrt{(p+1)/f(0)} \int_{\gamma_l} e^{-u^{p+1}} \frac{\partial Q}{\partial \tilde{\alpha}_k} \left( u \varepsilon'^{p+1} \sqrt{(p+1)/f(0)}, \varepsilon, \varepsilon \vec{\tilde{\alpha}}, y \right) du$$

Or

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial Q}{\partial \tilde{\alpha}_k}(x, \varepsilon, \varepsilon \vec{\tilde{\alpha}}, y) = x^k R_0 + \varepsilon \left( \frac{\partial R_1}{\partial \tilde{\alpha}_k} + y \frac{\partial R_2}{\partial \tilde{\alpha}_k} + y^2 \frac{\partial R_3}{\partial \tilde{\alpha}_k} \right) + x^p \frac{\partial R_4}{\partial \tilde{\alpha}_k},$$

et la dérivée partielle est donc équivalente à  $\frac{\partial Q}{\partial \tilde{\alpha}_k} \sim \varepsilon x^k Q_k^0$  quand  $\varepsilon$  puis  $x$  tendent vers 0. D'où la nouvelle approximation

$$e^{r(0)} \varepsilon'^{p+1} \sqrt{(p+1)/f(0)} \varepsilon Q_k^0 \int_{\gamma_l} e^{-u^{p+1}} (u \varepsilon')^k \left( \sqrt[p+1]{\frac{p+1}{f(0)}} \right)^k du$$

aussi équivalente à

$$\varepsilon C'_k \varepsilon'^{k+1} \int_{\gamma_l} e^{-u^{p+1}} u^k du$$

Notons  $I_k = \int_{\gamma_l} e^{-u^{p+1}} u^k du$ , qui est une intégrale bien définie. Pour passer du chemin  $\gamma_l$  à  $\gamma_1$ , au moins dans un voisinage de 0, il suffit d'effectuer une rotation d'angle  $\frac{2(l-1)\pi}{p+1}$ . Donc, en posant

$$u = v \exp \left( i \frac{2(l-1)\pi}{p+1} \right)$$

on obtient que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_l} e^{-u^{p+1}} u^k du &= \int_{\gamma_l} e^{-v^{p+1}} v^k \exp \left( i \frac{2k(l-1)\pi}{p+1} \right) \exp \left( i \frac{2(l-1)\pi}{p+1} \right) dv \\ &= \exp \left( i \frac{2(k+1)(l-1)\pi}{p+1} \right) I_k \end{aligned}$$

D'où le résultat final :

$$\int_{\gamma_l} \exp \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_x^0 t^p f(t) dt + r(x) \right) \frac{\partial Q}{\partial \tilde{\alpha}_k}(x, \varepsilon, \varepsilon \vec{\alpha}, y) dx \sim C_k \varepsilon'^{k+1} \varepsilon \exp \left( (k+1) \frac{2li\pi}{p+1} \right),$$

la valeur de  $C_k$  étant la constante non nulle

$$C_k = C'_k * I_k \exp \left( -(k+1) \frac{2i\pi}{p+1} \right).$$

### 3.3.4 Existence de solutions $y(x, \varepsilon)$ exceptionnelles qui restent bornées dans un voisinage de taille fixe du point 0

**Théorème 18** *Soit l'équation*

$$\varepsilon y' = (x^p f(x) + \varepsilon g(x, \varepsilon))y + h(x, \varepsilon) + \varepsilon y^2 P(x, \varepsilon, \varepsilon y) + Q(x, \varepsilon, \varepsilon \vec{\alpha}, y) \quad (\text{III}')$$

où toutes les fonctions qui interviennent sont holomorphes dans un voisinage  $\mathcal{D}_0$  de  $x = 0$  (avec  $f(0) \neq 0$ ), holomorphes en  $\varepsilon$  dans des secteurs centrés en 0,  $P$  étant aussi holomorphe en  $\varepsilon y = 0$ .  $Q$  se décompose comme en (3.16)

$$\begin{aligned} Q(x, \varepsilon, \vec{\alpha}, \varepsilon y) &= \alpha(x, \varepsilon) R_0(x) + \varepsilon R_1(x, \varepsilon, \vec{\alpha}) + \varepsilon y R_2(x, \varepsilon, \vec{\alpha}) \\ &\quad + \varepsilon y^2 R_3(x, \varepsilon, \vec{\alpha}, \varepsilon y) + x^p R_4(x, \varepsilon, \vec{\alpha}), \end{aligned}$$

avec

$$\alpha(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k(\varepsilon) x^k = a_0(x) + \varepsilon \tilde{\alpha}(x, \varepsilon).$$

Dans ce cas, il existe une unique solution formelle ( $\hat{y} = \sum y_n(x) \varepsilon^n$ ,  $\hat{\alpha} = \sum \tilde{a}_n \varepsilon^n$ ) telle que  $y_n(0)$  est bien définie pour tout  $n$ .

On construit  $p+1$  domaines  $\mathcal{D}_l \subset \mathcal{D}_0$  contenant chacun une des montagnes (pour le relief  $\Re(\int^x \frac{f(t)t^p}{\varepsilon} dt)$ ) naissant au voisinage du point col 0, chacun des domaines  $\mathcal{D}_l$  étant accessible à partir de son sommet, qu'on pourra éventuellement choisir infini (cf. fig 9).

Alors, si pour un certain  $\delta$  fixé et tout  $\varepsilon$  assez petit

$$\frac{|g(x, \varepsilon)| + |h(x, \varepsilon)| + |P(x, \varepsilon, \varepsilon \delta)|}{x^p f(x)} \text{ est bornée sur } \bigcup_{l=1}^{p+1} \mathcal{D}_l, \quad (\text{H1})$$

et

$$\frac{Q(x, \varepsilon, \delta, \delta)}{x^p f(x)} \text{ est bornée sur } \bigcup_{l=1}^{p+1} \mathcal{D}_l, \quad (\text{H2})$$

il existe, pour tout  $\varepsilon > 0$  assez petit, des  $\alpha_k(\varepsilon)$  et une fonction  $y(x, \varepsilon)$  holomorphe bornée sur  $\bigcup \mathcal{D}_l$  et sur un voisinage complet de  $x = 0$ ,  $\mathcal{B}(0, \rho)$ , tels que l'équation (III') soit vérifiée.

Cette solution  $(y, \tilde{\alpha})$  correspond à la solution formelle, c'est-à-dire qu'elle admet les séries formelles solutions comme développements asymptotiques :

$$y(x, \varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \varepsilon^n, \quad \tilde{\alpha}(\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \varepsilon^n.$$

Pour tout  $\tilde{\alpha}$  dans un voisinage de taille  $\varepsilon$  de  $a_1(x)$  (trouvé formellement, comme  $a_0$  précédemment), on sait que sur chaque domaine  $\mathcal{D}_l$ , il existe une solution  $y^{[l]}(x, \varepsilon)$ . Si les hypothèses du théorème 18 sont vérifiées, on a montré (au théorème 14) qu'on peut prolonger ces solutions jusqu'en  $x = 0$ , et qu'elles restent bornées en ce point quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Pour démontrer le théorème, nous allons montrer que pour tout  $\varepsilon$  assez petit, il existe un  $\tilde{\alpha}(x, \varepsilon)$  tel que les fonctions  $y^{[l]}(x, \varepsilon)$  définies chacune sur leur montagne  $\mathcal{D}_l$  soient toutes égales en  $x = 0$  :  $y^{[1]}(0, \varepsilon) = y^{[2]}(0, \varepsilon) = \dots = y^{[p+1]}(0, \varepsilon)$ .

Regardons comment  $y$  varie en fonction de  $\tilde{\alpha}$ . L'équation (III') implique, si on la dérive par rapport à  $\alpha_i$  :

$$\varepsilon \left( \frac{\partial y}{\partial \tilde{\alpha}_k} \right)' = \frac{\partial Q}{\partial \tilde{\alpha}_k}(x, \varepsilon, \varepsilon \tilde{\alpha}, y) + \frac{\partial y}{\partial \tilde{\alpha}_k} \times \left[ x^p f(x) + \varepsilon \left( g(x, \varepsilon) + 2yP(x, \varepsilon, \varepsilon y) + \varepsilon y^2 \frac{\partial P}{\partial y}(x, \varepsilon, \varepsilon y) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial Q}{\partial y}(x, \varepsilon, \varepsilon \tilde{\alpha}, y) \right) \right].$$

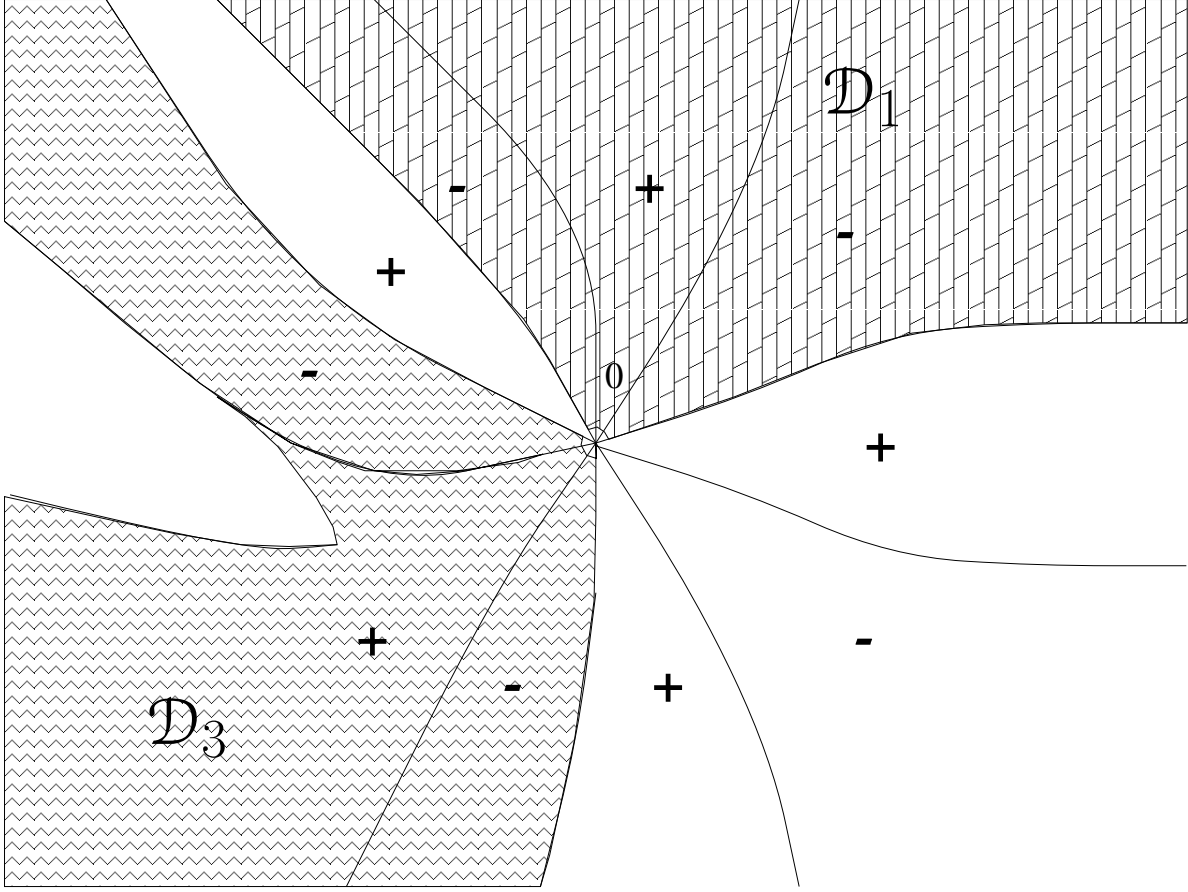


FIG. 9: Exemple de voisinage de 0, avec représentation de  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_3$  ( $p = 4$ )

On voit qu'on a une équation différentielle linéaire en  $\frac{\partial y}{\partial \tilde{\alpha}_k}$  ; les solutions peuvent donc s'écrire :

$$\frac{\partial y^{[l]}}{\partial \tilde{\alpha}_k} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma_l} e^{r(x)} \exp \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_x^0 t^p f(t) dt \right) \frac{\partial Q}{\partial \tilde{\alpha}_k}(x, \varepsilon, \varepsilon \vec{\alpha}, y) dx ,$$

avec

$$r(x) = \int_x^0 \left( g(t, \varepsilon) + 2yP(t, \varepsilon, \varepsilon y) + \varepsilon y^2 \frac{\partial P}{\partial y}(t, \varepsilon, \varepsilon y) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial Q}{\partial y}(t, \varepsilon, \varepsilon \vec{\alpha}, y) \right) dt ,$$

une fonction bornée quand  $\varepsilon$  tend vers 0, puisque  $\frac{\partial Q}{\partial y}$  est un  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ . On peut appliquer le lemme 6, qui nous donne alors :

$$\frac{\partial y^{[l]}}{\partial \tilde{\alpha}_k} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} C_k \varepsilon'^{k+1} \varepsilon \exp \left( l(k+1) \frac{2i\pi}{p+1} \right) . \quad (3.22)$$

En reprenant le résultat complet du théorème 17 (cf. (3.21)), on peut écrire une formule de Taylor pour chacun des  $y^{[l]}$  au voisinage de la fonction  $y_0$  en  $x = 0$  :

$$y^{[l]}(0, \varepsilon, \vec{\alpha}) - y_0(0) = \varepsilon \tilde{Y}_{p+1}(0) + \varepsilon \sum_{k=0}^{p-1} \tilde{\alpha}_k C_k \varepsilon'^{k+1} \exp \left( l(k+1) \frac{2i\pi}{p+1} \right) + o(\dots)$$

qui donne, après division par  $\varepsilon$ ,

$$\frac{1}{\varepsilon} \left( y^{[l]}(0, \varepsilon, \vec{\alpha}) - y_0(0) \right) = \tilde{Y}_{p+1}(0) + \sum_{k=0}^{p-1} \tilde{\alpha}_k C_k \exp \left( l(k+1) \frac{2i\pi}{p+1} \right) + o(\dots),$$

où  $\tilde{\alpha}_k = \tilde{\alpha}_k \varepsilon'^{k+1}$ . On rappelle que ni  $\tilde{Y}_{p+1}$  ni  $y_0$  ne dépendent de  $l$ ,  $\varepsilon$  ou  $\alpha$ .

Nous allons regarder le vecteur

$$\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} \left( y^{[1]}(0, \varepsilon, \vec{\alpha}) - y_0(0) \right) - \eta \\ \frac{1}{\varepsilon} \left( y^{[2]}(0, \varepsilon, \vec{\alpha}) - y_0(0) \right) - \eta \\ \vdots \\ \frac{1}{\varepsilon} \left( y^{[p+1]}(0, \varepsilon, \vec{\alpha}) - y_0(0) \right) - \eta \end{pmatrix}$$

de taille  $p+1$ , dépendant des  $p+2$  variables  $\varepsilon$ ,  $w_1 = \eta$ ,  $w_2 = \tilde{\alpha}_0, \dots, w_{p+1} = \tilde{\alpha}_{p-1}$ . D'après ce qui précède, la matrice jacobienne de  $\mathcal{Y}$  par rapport aux  $p+1$  dernières variables est

$$\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial w} \Big|_{\varepsilon=0, w=(\tilde{Y}_{p+1}(0), 0, \dots, 0)} = \begin{bmatrix} -1 & C_0 e^{(1 \cdot 1 \cdot \frac{2i\pi}{p+1})} & \dots & C_{p-1} e^{(1 \cdot p \cdot \frac{2i\pi}{p+1})} \\ -1 & C_0 e^{(2 \cdot 1 \cdot \frac{2i\pi}{p+1})} & \dots & C_{p-1} e^{(2 \cdot p \cdot \frac{2i\pi}{p+1})} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & C_0 e^{((p+1) \cdot 1 \cdot \frac{2i\pi}{p+1})} & \dots & C_{p-1} e^{((p+1) \cdot p \cdot \frac{2i\pi}{p+1})} \end{bmatrix}$$

Le déterminant correspondant est non nul. En effet, en factorisant le jacobien obtenu par colonnes, on obtient

$$Det \left( \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial w} \right) = - \prod_{k=0}^{p-1} C_k \begin{vmatrix} 1 & \left( \exp \frac{2i\pi}{p+1} \right) & \dots & \left( \exp \frac{2i\pi}{p+1} \right)^p \\ 1 & \left( \exp \frac{4i\pi}{p+1} \right) & \dots & \left( \exp \frac{4i\pi}{p+1} \right)^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \left( \exp \frac{2(p+1)i\pi}{p+1} \right) & \dots & \left( \exp \frac{2i(p+1)\pi}{p+1} \right)^p \end{vmatrix}$$

Le déterminant qui reste est un déterminant de Van der Monde, qui est bien non nul.

On en déduit que  $\mathcal{Y}$  est localement inversible autour de  $w = 0$ .

On regarde la fonction  $\mathcal{Y}(\varepsilon, w)$ ; on sait que, avec  $w_0 = (\tilde{Y}_{p+1}(0), 0, \dots, 0)$ ,

$$\mathcal{Y}(0, w_0) = 0$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial w}(\varepsilon=0, w=w_0) \text{ est inversible}$$

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe donc une unique fonction  $w(\varepsilon)$  telle que  $\mathcal{Y}(\varepsilon, w(\varepsilon)) = 0$ , pour tout  $\varepsilon$  dans un voisinage suffisamment petit de 0. Les fonctions  $\tilde{\alpha}(\varepsilon)$  que l'on en déduit sont bornées en  $\varepsilon$ ; donc les fonctions  $\varepsilon \vec{\tilde{\alpha}} = \tilde{\alpha} \varepsilon'^{p-k+1}$  tendent vers 0 avec  $\varepsilon$ . Cette propriété nous suffit pour pouvoir effectivement appliquer le théorème des fonctions implicites : les  $\tilde{\alpha}_k$  sont toujours accompagnés d'un  $\varepsilon$  en facteur dans toute ce paragraphe. Les fonctions  $\varepsilon \vec{\tilde{\alpha}}(\varepsilon)$  sont holomorphes en  $\varepsilon$  dans des secteurs ouverts en 0, puisque le passage de  $\varepsilon$  à  $\varepsilon' = \varepsilon^{\frac{1}{p+1}}$  n'est pas bijectif dans un voisinage du point 0.

Avec  $\vec{\tilde{\alpha}}$ , on trouve en même temps la fonction  $y(x, \varepsilon)$  correspondante à partir de  $y(0, \varepsilon) = y_0(0) + \varepsilon \eta(\varepsilon)$ ; dans les paragraphes précédents, on a montré qu'il s'agissait d'une fonction bornée, en  $x = 0$  et dans tous les domaines  $\mathcal{D}_l$  autour de 0. On vient ainsi de finir de démontrer l'existence de la vraie solution  $(y, \alpha)$  du théorème, bornée quand  $\varepsilon$  tend vers 0, dans l'union des domaines  $\mathcal{D}_l$ .

Il reste à justifier que la solution formelle  $(\hat{y}, \hat{\alpha})$  est le développement asymptotique de  $(y, \vec{\tilde{\alpha}})$ . La démonstration se fait de manière analogue à celle du théorème 11. On sait que la solution  $(y, \vec{a}_0 + \varepsilon \vec{\tilde{\alpha}})$  existe, avec  $\varepsilon \vec{\tilde{\alpha}}$  bornée en  $\varepsilon$ , et on écrit

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon) &= y_0(x) + \varepsilon z(x, \varepsilon) \\ a_0(x) + \varepsilon \tilde{\alpha}(x, \varepsilon) &= a_0(x) + \varepsilon a_1(x) + \varepsilon^2 \check{\alpha}(x, \varepsilon). \end{aligned}$$

Si on introduit ces notations dans l'équation différentielle (III'), cela donne une équation différentielle linéaire en  $z$  avec un paramètre  $\check{\alpha}(x, \varepsilon)$  qui intervient lui aussi de manière linéaire :

$$\begin{aligned} \varepsilon z' &= (x^p f(x) + \varepsilon g(x, \varepsilon)) z + \varepsilon \check{\alpha}(x, \varepsilon) R_0(x) + x^p \frac{R_4(x, \varepsilon, \varepsilon \vec{\tilde{\alpha}}) - R_4(x, 0, 0)}{\varepsilon} + \\ &\left( \frac{h(x, \varepsilon) - h(x, 0)}{\varepsilon} - y'_0 + g(x, \varepsilon) y_0 + y^2 P(x, \varepsilon, \varepsilon y) + a_1(x, \varepsilon) R_0 + R_1 + y R_2 + y^2 R_3 \right) \end{aligned}$$

(on rappelle que  $R_0$  ne dépend que de  $x$ ;  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_4$  de  $x$ ,  $\varepsilon$  et  $\varepsilon \vec{\tilde{\alpha}}$ ; et que  $R_3$  dépend en plus de  $\varepsilon y$ ).

On vérifie très facilement que les hypothèses du théorème sont encore vérifiées pour cette équation :

1.  $f$  et  $g$  ne changent pas.
2. la nouvelle fonction  $\check{P}$  est nulle.
3. la nouvelle fonction  $\check{Q}(x, \varepsilon, \varepsilon \check{\alpha}, \varepsilon y)$ , quant à elle, se réduit à la somme des deux termes  $\varepsilon \check{\alpha}(x, \varepsilon) R_0(x) + x^p \frac{R_4(x, \varepsilon, \varepsilon \check{\alpha}) - R_4(x, 0, 0)}{\varepsilon}$ . Le premier terme ne pose aucune difficulté. Et le second peut s'écrire aussi  $x^p \check{R}_4(x, \varepsilon, \varepsilon \check{\alpha})$ .
4.  $\check{h}(x, \varepsilon)$  correspond à la deuxième ligne dans l'équation ci-dessus. Cette fonction qui peut s'exprimer en fonction de  $x$  et  $\varepsilon$  uniquement (puisque  $y$  et  $\varepsilon \check{\alpha}$  sont bien connus) vérifie la condition de majoration voulue.

Avec ce qui vient d'être démontré, on sait donc qu'il existe  $z(x, \varepsilon)$  et  $\varepsilon \check{\alpha}(x, \varepsilon)$  bornées en  $\varepsilon$  telles que  $z$  existe et est holomorphe en  $x = 0$ , et  $\varepsilon \check{\alpha}(\varepsilon)$  est holomorphe en  $\varepsilon$ .

Une simple récurrence suffit ensuite pour clore la démonstration du théorème 18.

## Chapitre 4

# L'équation du Brusselator

Le système différentiel du Brusselator apparaît pour l'étude de l'évolution cinétique de certaines réactions chimiques auto-catalytiques. Il peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{\chi} &= a(1 + \chi)^2 y + a\chi^2 + (a - 1)\chi \\ \dot{y} &= -\chi(1 + \chi) - y(1 + \chi)^2 \end{cases}$$

Qualitativement, il y a des solutions canard de ce système pour des valeurs du paramètre  $a$  voisines de  $a_0 = 1$ . Dans ce cas, la courbe lente a pour équation  $y = \frac{-\chi^2}{(1+\chi)^2}$ , et les trajectoires des solutions peuvent être amenées à suivre cette courbe lente y compris sur sa partie instable (cf. figure 10). On s'intéressera en fait aux grands canards, c'est-à-dire aux trajectoires qui suivent la partie instable de la courbe jusqu'en  $x$  infini.

### 4.1 Existence de solutions canards

Nous allons commencer par transformer le système pour obtenir une équation sous une forme «normale», correspondant à celle étudiée dans la partie précédente (en particulier, nous ramènerons le point col pour le relief situé à l'infini en un point fini). Puis nous verrons quel est le domaine d'existence des solutions surstables à l'équation obtenue.

Pour étudier ces solutions, nous allons prendre la nouvelle variable  $z = \dot{\chi}$ , ce qui ramène la première équation du système à

$$a(1 + \chi)^2 y = -a\chi^2 - (a - 1)\chi + \varepsilon z$$

et la seconde à :

$$z \frac{dy}{d\chi} = \frac{dy}{dt} = -(\chi + 1)\chi + \chi^2 + \frac{a - 1}{a}\chi - \frac{\varepsilon}{a}z = \frac{-\chi - \varepsilon z}{a}.$$



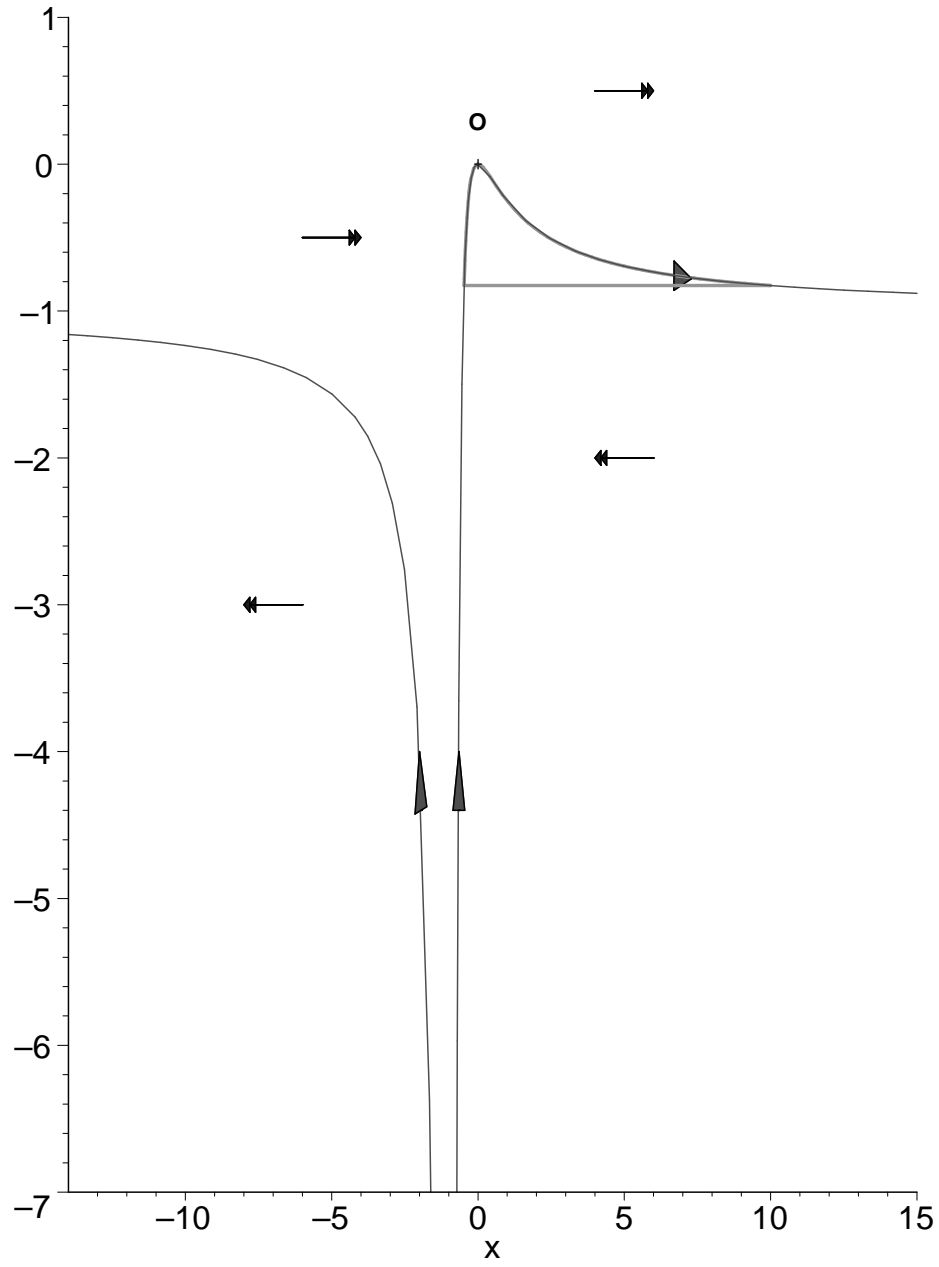


FIG. 10: Courbe canard du Brusselator

Or, la première équation ci-dessus nous donne aussi

$$\frac{dy}{d\chi} = \frac{-2\chi}{(1+\chi)^3} - \frac{a-1}{a} \frac{1-\chi}{(1+\chi)^3} + \frac{\varepsilon}{a} \frac{2z + (1+\chi)dz/d\chi}{(1+\chi)^3},$$

soit

$$a(1+\chi)^2 \frac{dy}{d\chi} = -a + \frac{1-\chi}{1+\chi} + \varepsilon \left( \frac{2z}{1+\chi} + \frac{dz}{d\chi} \right).$$

Le système du Brusselator peut donc se ramener à l'équation suivante, que nous appellerons équation du Brusselator.

$$\varepsilon z \frac{dz}{d\chi} = \frac{2\chi}{1+\chi} \left( z - \frac{(1+\chi)^3}{2} \right) + (a-1)z + z \left( z - \frac{(1+\chi)^3}{2} \right) \frac{2\varepsilon}{1+\chi}$$

On voit déjà sur cette équation que la fonction  $\Phi_0(\chi) = \frac{(1+\chi)^3}{2}$  est particulière pour cette équation : pour le paramètre  $a = 1$  elle est solution quand  $\varepsilon = 0$ , et c'est alors la seule solution (pour  $\varepsilon = 0$  quand on fait varier  $a$ ) qui soit continue en  $\chi = 0$ .

On effectue le changement de variable suivant, qui ramène l'infini en  $-1$  et laisse  $0$  en  $0$ .

$$\chi = \frac{-x}{1+x}, \text{ puis } \frac{dx}{d\chi} = -(1+x)^2$$

Si on compare alors avec l'équation de Van der Pol,  $0$  correspondra ici à  $1$  (le point col qui n'est, exceptionnellement, pas un point tournant),  $-1$  à  $-1$  (l'autre point col du relief).

D'où l'équation

$$\varepsilon z(x) \frac{dz(x)}{dx} = \frac{2x}{(1+x)^2} \left( z - \frac{1}{2(1+x)^3} \right) - \frac{a-1}{(1+x)^2} z - z \left( z - \frac{1}{2(1+x)^3} \right) \frac{2\varepsilon}{1+x} \quad (4.1)$$

Montrons que cette équation est bien du genre étudié lors de la généralisation (voir partie précédente). On pose pour cela  $z = \Phi_0(x)(1+\varepsilon y)$ , où  $\Phi_0(x)$  correspond à la courbe lente, ici  $\frac{1}{2(1+x)^3}$ , et on remplace dans l'équation (4.1) après en avoir divisé les deux membres par  $z$

$$\varepsilon \Phi_0'(1+\varepsilon y) + \varepsilon^2 y' \Phi_0 = \frac{2x\varepsilon y}{(1+x)^2(1+\varepsilon y)} - \frac{a-1}{(1+x)^2} - \Phi_0 \varepsilon y \frac{2\varepsilon}{1+x}$$

Donc

$$\varepsilon y' = y \left[ 4x(1+x) + \frac{\varepsilon}{1+x} \right] + \frac{3}{1+x} - 2(x+1) \frac{a-1}{\varepsilon} - \varepsilon y^2 4x(1+x) \frac{1}{1+\varepsilon y}$$

On voit que autour de  $0$ , on a :

- $p = 1$  et  $f(x) = 4(1+x)$
- $g(x, \varepsilon) = \frac{1}{1+x}$

- $h(x, \varepsilon) = \frac{3}{1+x}$
- $P(x, \varepsilon, \varepsilon y) = -\frac{4x(1+x)}{1+\varepsilon y}$
- $Q(x, \varepsilon, y) = -2(x+1)$  avec  $\alpha = \frac{a-1}{\varepsilon}$ .
- On prend alors pour  $\mathcal{D}_0$  l'ensemble  $\mathbb{C}$  privé du demi-axe réel  $] -\infty, -1]$ .
- Toutes les hypothèses étant respectées, vu le relief représenté figure 11, le théorème 18 s'applique : pour une valeur de  $a$  bien choisie, soit  $a^+(\varepsilon)$ , il existe une solution holomorphe  $z^+(x)$  qui sera continue en 0 et qui a pour domaine d'existence les montagnes Nord et Est et les vallées adjacentes ; voir fig. 11. Symétriquement, en prenant les conjugués, on trouve une solution  $z^- = \overline{z^+}$  correspondant au paramètre  $a = a^-(\varepsilon) = \overline{a^+}$ .

Bien évidemment, ces deux solutions  $(a, z)$  correspondent toutes les deux aux séries formelles uniques

$$\hat{a}(\varepsilon) = \sum a_n \varepsilon^n \quad \text{et} \quad \hat{z}(\varepsilon, x) = \sum z_n(x) \varepsilon^n$$

construites de telle sorte que tous les termes  $z_n$  sont continus en  $x = 0$ .

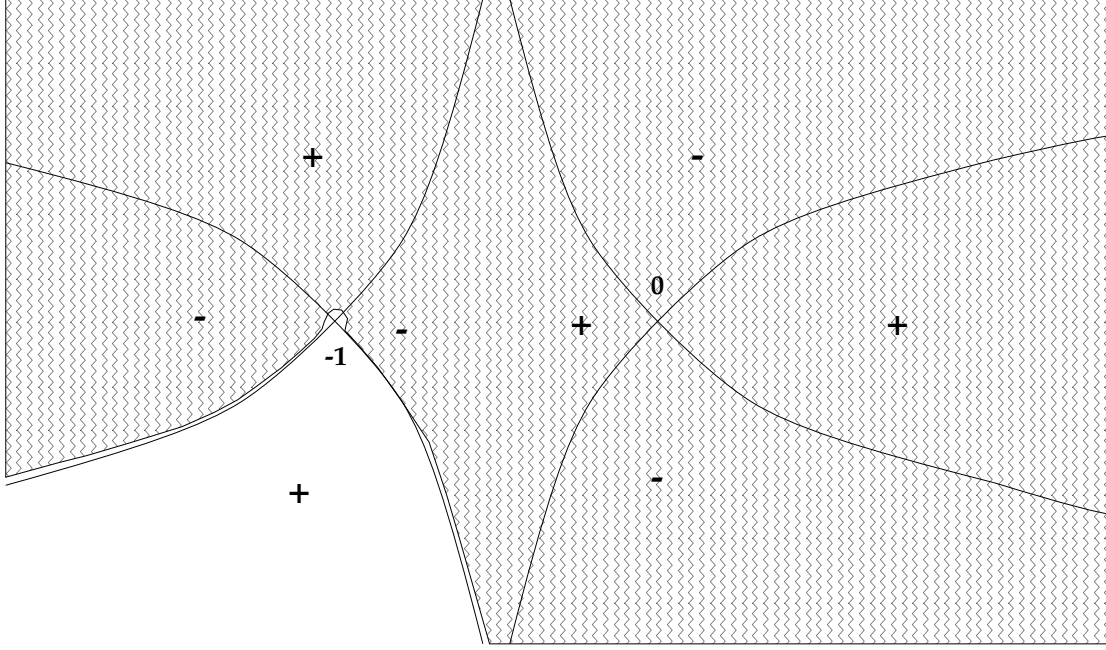
Si on regarde ensuite ce qui se passe autour de  $-1$ , en changeant de variable :  $\tilde{x} = x - 1$ , on trouve de manière analogue

- $p = 1$ ,  $f(\tilde{x}) = 4(1 - \tilde{x})$  et  $\varepsilon' = \sqrt{\varepsilon}$
- $g(\tilde{x}, \varepsilon) = \frac{1}{\tilde{x}}$  d'où aussi  $G_0(X) = \frac{1}{X}$
- $h(\tilde{x}, \varepsilon) = \frac{3}{\tilde{x}} - 2\tilde{x}\frac{a-1}{\varepsilon}$  d'où aussi  $H_0(X) = \frac{3}{X}$
- $P(\tilde{x}, \varepsilon, \varepsilon y) = \frac{4\tilde{x}(1+\tilde{x})}{1+\varepsilon y}$  d'où aussi  $P_0(X, Y) = \frac{4X}{1+Y}$
- On prend alors pour  $\mathcal{D}$  la montagne Est (à partir de  $-1$ ) et éventuellement une partie des vallées adjacentes.
- Les hypothèses des théorèmes 12, 13, 15 sont respectées : on peut prolonger le domaine jusqu'en  $-1 + X_l \sqrt{\varepsilon} \in \mathbb{R}$  ; et la solution canard admet une sorte de développement asymptotique en  $\sqrt{\varepsilon}$  pour des  $x$  tels que  $|1+x| < |\sqrt{\varepsilon}|^{1+\nu}$  ( $\nu > 0$ ), obtenu à partir de la solution formelle de l'équation différentielle non singulièrement perturbée ; tandis que le développement asymptotique  $\hat{z}(\varepsilon, x) = \sum z_n(x) \varepsilon^n$  reste valable, dans le sens du théorème 15, pour les  $x$  (sur la montagne Est) tels que  $|1+x| > |\sqrt{\varepsilon}|^{1+\mu}$ ,  $0 < \nu < \mu < 1$ .

## 4.2 Estimation de $a^+ - a^-$

L'existence de solutions là où on le souhaite est donc acquise. Maintenant, pour des raisons de simplicités de calcul, nous allons repartir de l'équation (4.1) ; la progression suivra alors exactement le même schéma que pour l'équation de Van der Pol. C'est à dire que nous allons établir une équation reliant la différence  $a^+ - a^-$

FIG. 11: Relief correspondant à  $\int_0^x 2t(1+t)dt$  : domaine accessible à partir des sommets Est ou Nord, pour  $a = a^+$  ; les courbes passant par 0 sont les courbes de niveau  $R(x) = 0$ , celles passant par  $-1$  ont pour équation  $R(x) = 1/3$ .



à la différence entre les fonctions  $z^+ - z^-$ , étudiée au voisinage du point singulier  $-1$  ; pour pouvoir ensuite estimer chacun des termes présents dans l'équation obtenue, nous aurons besoin en particulier des équivalents (pour  $\varepsilon$  tendant vers 0) de toutes les fonctions solutions des équations intérieures comme extérieures, et des coefficients de Stokes des solutions intérieures. Certains des calculs seront faits ici en préliminaires.

Pour étudier le voisinage de  $-1$ , le changement de variable qui s'impose est en tous cas le suivant

$$x = -1 + \varepsilon^{1/2}X \quad , \quad z = \varepsilon^{-3/2}Y \quad .$$

D'où l'équation intérieure, non singulièrement perturbée

$$Y \frac{dY}{dX} = \frac{2(-1 + \sqrt{\varepsilon}X)}{X^2} \left( Y - \frac{1}{2X^3} \right) - \frac{a-1}{X^2} Y - \frac{2Y}{X} \left( Y - \frac{1}{2X^3} \right) .$$

Cette dernière équation a pour solution formelle la série  $\hat{Y} = \sum Y_n(X) \varepsilon^{n/2}$  (et on sait que cette série correspond à une vraie solution dans certains domaines),

avec  $Y_0$  solution de l'équation obtenue en posant  $\varepsilon = 0$ , soit

$$Y_0 \frac{dY_0}{dX} = \frac{-2}{X} \left( Y_0 - \frac{1}{2X^3} \right) \left( Y_0 + \frac{1}{X} \right). \quad (4.2)$$

#### 4.2.1 Quelques équivalents

Si on cherche des équivalents pour les premières fonctions des séries  $\hat{y}$  et  $\hat{Y}$ , on commence par écrire dans l'équation (4.1) la fonction  $z$  et le paramètre  $a$  sous la forme  $z(\chi) = \Phi_0(\chi) + \varepsilon \Phi_1(\chi) + o(\varepsilon)$  et  $a = 1 + a_1\varepsilon + o(\varepsilon)$ ; on part de

$$\Phi_0(\chi) = \frac{(1+\chi)^3}{2}, \quad \Phi_0(x) = \frac{1}{2(1+x)^3},$$

puis, comme

$$\Phi_0 \Phi'_0 = \frac{2\chi}{1+\chi} \Phi_1 + a_1 \Phi_0$$

et que  $\Phi_1$  doit être continue en 0, on trouve

$$a_1 = 3/2, \quad \Phi_1(\chi) = \frac{3(1+\chi)^4}{8}(2+\chi)$$

autrement dit

$$\Phi_1(x) = \frac{3}{8} \frac{2+x}{(1+x)^5}.$$

On continue pour obtenir le terme suivant : dans l'équation du Brusselator, les termes de degré 2 en  $\varepsilon$  mèneront à l'équation

$$\Phi_0 \Phi'_1 + \Phi'_0 \Phi_1 = \frac{2\chi}{1+\chi} \Phi_2 + a_1 \Phi_1 + a_2 \Phi_0 + \frac{2\Phi_0 \Phi_1}{1+\chi}$$

d'où

$$a_2 = 15/8, \quad \Phi_2(\chi) = \frac{3(1+\chi)^4}{32}(6\chi^3 + 29\chi^2 + 48\chi + 30)$$

autrement dit

$$\Phi_2(x) = \frac{3}{32} \frac{5x^3 + 23x^2 + 42x + 30}{(1+x)^7}.$$

Ensuite, pour la série  $\hat{Y}$ , on fait le changement de variable et on identifie, avec  $x = -1 + X\sqrt{\varepsilon}$ , les deux séries

$$\varepsilon^{3/2} \left( \Phi_0(x) + \varepsilon \Phi_1(x) + \varepsilon^2 \Phi_2(x) \right) = Y_0(X) + \sqrt{\varepsilon} Y_1(X) + \varepsilon Y_2(X) + o(\varepsilon),$$

ce qui mène à

$$Y_0(X) \underset{X \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2X^3} + \frac{3}{8X^5} + \frac{9}{16X^7}, \quad Y_1(X) \sim \frac{3}{8X^4} + \frac{33}{32X^6}, \quad Y_2(X) \sim \frac{3}{4X^5}.$$

### 4.2.2 Coefficient de Stokes pour l'équation (4.2)

Si l'équation (4.2) a deux solutions conjuguées  $Y_0^+$  et  $Y_0^-$ , bornées toutes deux pour les  $X \in \mathbb{R}$  assez grand, elles ont nécessairement la même série asymptotique (dont les termes sont donnés ci-dessus) et la différence entre les deux est donc exponentiellement petite. Elle correspond à des termes de Stokes ; nous allons montrer que :

**Lemme 19** *La différence entre deux solutions bornées en l'infini de l'équation (4.2) est équivalente, quand  $X$  tend vers l'infini, à*

$$(Y_0^+ - Y_0^-)(X) \sim 32i\sqrt{2\pi}X^4e^{-2X^2}.$$

Pour parvenir à ce résultat, nous allons essayer de donner, sous une certaine forme (car on ne peut espérer en donner explicitement les solutions exactes), les solutions de l'équation.

$$(4.2) \quad Y_0' = -\frac{2}{X}Y_0 + \frac{1}{X^4} - \frac{2}{X^2} + \frac{1}{X^5Y_0}$$

On commence par changer de variable en posant  $t = 1/X$

$$\frac{dY_0}{dt} = \frac{2Y_0}{t} - t^2 + 2 - \frac{t^3}{Y_0},$$

puis on introduit la nouvelle fonction  $u(t)$  telle que  $Y_0(t) = t^2u(t)$

$$2tu + t^2u' = 2tu - t^2 + 2 - t/u$$

$$u' = -1 + \frac{2}{t^2} - \frac{1}{tu},$$

et  $v(t)$  vérifiant  $u(t) = -t - 2t^{-1} + v(t)$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{t^2 + 2 - tv(t)}.$$

À présent plutôt que de regarder  $v$  en fonction de  $t$ , on prend la fonction réciproque : on cherche  $t$  en fonction de  $v$

$$\frac{dt}{dv} = t(v)^2 + 2 - vt(v)$$

On reconnaît une équation de Ricatti. La manière habituelle de résoudre ce type d'équation est de poser  $t = -\frac{z'(v)}{z(v)}$ .

$$\begin{aligned} -\frac{z''}{z} + \frac{z'^2}{z^2} &= 2 + \frac{z'}{z}v + \frac{z'^2}{z^2} \\ z'' + vz' + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Cette dernière équation est une équation différentielle hypergéométrique, qui a les deux solutions indépendantes suivantes (parmi d'autres possibles) :

$$z_1(v) = v \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) \quad \text{puis} \quad z_2(v) = v \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) \int_{i\infty}^v \frac{1}{w^2} e^{w^2/2} dw,$$

de dérivées

$$z'_1(v) = (1 - v^2)e^{-v^2/2} \quad \text{et} \quad z'_2(v) = (1 - v^2)e^{-v^2/2} \int_{i\infty}^v \frac{e^{w^2/2}}{w^2} dw + \frac{1}{v}.$$

On peut finalement écrire toute solution  $t(v)$  sous la forme :

$$t(v) = \frac{C_1(v^2 - 1)e^{-v^2/2} + C_2(v^2 - 1)e^{-v^2/2} \int_{i\infty}^v \frac{e^{w^2/2}}{w^2} dw - C_2/v}{C_1 v e^{-v^2/2} + C_2 v e^{-v^2/2} \int_{i\infty}^v \frac{1}{w^2} e^{w^2/2} dw}$$

Mais toutes ces solutions  $t$  ne nous conviennent pas. En effet, on a vu précédemment que les solutions  $Y$  considérées devaient vérifier la propriété suivante :

$$Y_0(X) \underset{X \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2X^3},$$

soit, après changements de variables,

$$-t^3 - 2t + t^2 v \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^3/2,$$

ce qui suppose au moins que

$$t(v) \underset{v \rightarrow \infty}{\sim} 2/v.$$

Or si on prend  $C_2 = 0$ , on trouve  $t = \frac{v^2-1}{v}$ , qui ne vérifie pas cet équivalent.

Par contre, pour toute autre solution (dans le secteur où elle est définie à l'infini), on trouve le bon équivalent. On montre en utilisant des intégrations par parties que, quand  $v \rightarrow \infty$ ,

$$\int_{i\infty}^v \frac{e^{w^2/2}}{w^2} dw = \frac{1}{v^3} e^{v^2/2} \left(1 + \frac{3}{v^2} + o(1/v^2)\right).$$

Ce qui fait que, si  $C_2 \neq 0$ ,

$$z'(v) \underset{v \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{2}{v^3} \tag{4.3}$$

$$z(v) \underset{v \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{v^2} \tag{4.4}$$

et donc

$$t(v) \underset{v \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{v}$$

ce qui donne une solution  $Y_0$  qui se comporte bien comme prévu à l'infini.

Comme  $C_2 \neq 0$  dans les cas qui nous intéressent, on écrira désormais  $t(v)$  avec une seule constante  $C = C_1/C_2$  :

$$t(v) = \frac{(v^2 - 1)e^{-v^2/2} \left( \int_{i\infty}^v \frac{e^{w^2/2}}{w^2} dw + C \right) - \frac{1}{v}}{ve^{-v^2/2} \left( \int_{i\infty}^v \frac{e^{w^2/2}}{w^2} dw + C \right)}$$

Si alors  $C = 0$ , la fonction  $t^+(v)$  est bien définie pour tout  $v$  tel que  $\arg(v) \in [-\pi/4 + \delta, 5\pi/4 - \delta]$ ,  $\delta > 0$ , parce que pour  $\arg(v^2) \in ]-\pi/2, \pi/2[$ , l'exponentielle  $e^{-v^2/2}$  est bien bornée et que pour  $\arg(v) \in [\pi/4, 3\pi/4]$ , ce sont les intégrales qui sont effectivement exponentiellement petites. Si on repasse à la variable  $X$ , cela donne l'existence d'une solution  $Y_0^+$  au moins pour tout  $X$  assez grand sur l'axe réel et la montagne Nord (cf. figure 11) d'après l'équivalent  $X = 1/t(v) \sim 2v$ .

Pour  $C = i\sqrt{2\pi}$ , on peut réécrire  $t(v)$  sous la forme suivante :

$$t^-(v) = \frac{(v^2 - 1)e^{-v^2/2} \int_{-i\infty}^v \frac{e^{w^2/2}}{w^2} dw - \frac{1}{v}}{ve^{-v^2/2} \int_{-i\infty}^v \frac{1}{w^2} e^{w^2/2} dw}$$

En effet, en intégrant par parties

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\exp(w^2/2)}{w^2} dw = \left[ -\frac{\exp(w^2/2)}{w} \right]_{-i\infty}^{i\infty} + \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp(w^2/2) dw$$

et avec le changement de variable  $t = iw/\sqrt{2}$ ,

$$= \sqrt{2}/i \int_{+\infty}^{-\infty} \exp(-t^2) dt = i\sqrt{2\pi}$$

La solution  $t^-$  donne une solution  $Y_0^-$  pour des  $X$  dans un domaine symétrique (par la conjugaison complexe) au domaine image de  $t^+$ .

On considère à présent des variables complexes  $v^+$  et  $v^-$  telles que

$$t^+(v^+) = t^-(v^-) \in \mathbb{R}.$$

Pour des raisons de symétrie, ces deux nombres  $v^\pm$  sont *a priori* conjugués. On souhaite étudier la différence entre ces deux nombres quand ils tendent vers  $+\infty$ .



La méthode sera semblable à celle utilisée pour l'équation de Van der Pol.

$$\begin{aligned} t^+(v^+) &= t^-(v^-) \\ \frac{z^{+'}(v^+)}{z^+(v^+)} &= \frac{z^{-'}(v^-)}{z^-(v^-)} \\ &= \frac{z^{+'}(v^-) \left( 1 + i\sqrt{2\pi} \frac{(v^2-1)e^{-v^2/2}}{z^{+'}(v^-)} \right)}{z^+(v^-) \left( 1 + i\sqrt{2\pi} \frac{ve^{-v^2/2}}{z^+(v^-)} \right)} \end{aligned}$$

Comme les termes  $e^{-v^2/2}/z^{(\prime)}$  sont exponentiellement petits quand  $v \rightarrow \infty$ , on peut écrire des développements limités :

$$\begin{aligned} &= \frac{z^{+'}(v^-)}{z^+(v^-)} \left( 1 + i\sqrt{2\pi} \left[ \frac{(v^2-1)e^{-v^2/2}}{z^{+'}(v^-)} - \frac{ve^{-v^2/2}}{z^+(v^-)} \right] + o(\dots) \right) \\ t^+(v^+) - t^-(v^-) &\sim t^+(v^-) i\sqrt{2\pi} e^{-v^2/2} \left[ \frac{(v^2-1)}{z^{+'}(v^-)} - \frac{v}{z^+(v^-)} \right] \end{aligned}$$

D'où, avec les équivalents pour  $z$  et  $z'$  trouvés en (4.4) et (4.3)

$$t^+(v^+) - t^-(v^-) \sim -i\sqrt{2\pi} e^{-v^2/2} v^4$$

Or, comme  $v^+$  et  $v^-$  sont proches, on peut aussi écrire

$$t^+(v^+) - t^-(v^-) \sim (v^+ - v^-) t^{+'}(v^+).$$

Donc finalement

$$v^+ - v^- \sim \frac{i}{2} \sqrt{2\pi} e^{-v^2/2} v^6.$$

On en déduit facilement les équivalents correspondants pour  $(Y_0^+ - Y_0^-)(X)$ , sachant que

$$Y_0^+ - Y_0^- = \frac{v^+ - v^-}{X^2} \quad \text{et} \quad v \sim \frac{2}{t} \sim 2X.$$

On obtient

$$(Y_0^+ - Y_0^-)(X) \sim 32i\sqrt{2\pi} X^4 e^{-2X^2}, \quad (19)$$

avec donc un coefficient de Stokes

$$\mathcal{C} = 32i\sqrt{2\pi}.$$

### 4.2.3 L'équation différentielle pour l'estimation de $a^+ - a^-$

Comme dans la première partie on cherche une équation différentielle en  $d(x) = (z^+ - z^-)(x)$ ; on pose aussi  $b = a^+ - a^-$ .

À partir de l'équation (4.1) ci-dessous

$$\varepsilon \frac{dz^+(x)}{dx} = \frac{2x}{(1+x)^2} \left(1 - \frac{1}{2z^+(1+x)^3}\right) - \frac{a^+ - 1}{(1+x)^2} - \left(z^+ - \frac{1}{2(1+x)^3}\right) \frac{2\varepsilon}{1+x}$$

et de la même équation écrite pour  $(z^-, a^-)$ , on arrive, en faisant la différence, à

$$\begin{aligned} \varepsilon d'(x) &= \frac{x}{(1+x)^5} \left(\frac{1}{z^-} - \frac{1}{z^+}\right) - \frac{b}{(1+x)^2} - d \frac{2\varepsilon}{1+x} \\ \varepsilon d'(x) &= d \left( \frac{x}{(1+x)^5 z^- z^+} - \frac{2\varepsilon}{1+x} \right) - \frac{b}{(1+x)^2}. \end{aligned}$$

D'où, pour tout  $x_0$  réel,

$$d(x_0) = \frac{-b}{\varepsilon} \int_{+\infty}^{x_0} \frac{\exp\left(\frac{G_T(x_0) - G_T(t)}{\varepsilon}\right)}{(1+t)^2} dt$$

avec  $G_T(x) = \int_0^x \frac{t}{(1+t)^5 z^+(t) z^-(t)} dt - 2\varepsilon \ln(1+x)$ , soit

$$d(x_0) = \frac{-be^{G(x_0)/\varepsilon}}{\varepsilon(1+x_0)^2} \int_{+\infty}^{x_0} e^{-G(t)/\varepsilon} dt \quad (4.5)$$

où  $G(x) = \int_0^x \frac{t}{(1+t)^5 z^+(t) z^-(t)} dt$ .

### 4.2.4 Calcul de l'équivalent

On peut estimer chacun des termes du produit de (4.5) (on travaillera ici avec un  $\varepsilon$  réel positif).

Avec la méthode du point col,

$$\int_{+\infty}^{x_0} e^{-G(t)/\varepsilon} dt \sim -\sqrt{2\pi\varepsilon} |z(0)| \quad \text{avec} \quad |z(0)| \sim \Phi_0(0) = \frac{1}{2}. \quad (4.6)$$

Puis

$$d(x_0) \sim \varepsilon^{-3/2} (Y_0^+(X_l) - Y_0^-(X_l)). \quad (4.7)$$

Reste  $e^{G(x_0)/\varepsilon}$ , où on prend  $x_0 = -1 + X_l \sqrt{\varepsilon}$ . On coupe l'intégrale correspondant à  $G(x_0)$  en deux, en un point  $\lambda(\varepsilon)$  dépendant peu de  $\varepsilon$ , comme par exemple  $\lambda(\varepsilon) = -1 + \varepsilon^{1/20}$ ; le but étant qu'à droite on puisse utiliser l'estimation

$z(t, \varepsilon) = \Phi_0(t) + \varepsilon \Phi_1(t) + \varepsilon^2 \Phi_2(t) + o(\varepsilon^{2-2/20})$  (théorème 15) ; et à gauche, grâce au corollaire 13, l'estimation  $z(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}(Y_0(t/\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}Y_1(t/\varepsilon) + \varepsilon Y_2(t/\varepsilon)) + o(\sqrt{\varepsilon}^{1-3/20})$ .

$$G(x_0) = \int_0^\lambda \frac{t}{(1+t)^5 z^+(t) z^-(t)} dt + \int_\lambda^{x_0} \frac{t}{(1+t)^5 z^+(t) z^-(t)} dt.$$

Pour  $\mathcal{I}_1 = \int_0^\lambda \frac{t}{(1+t)^5 z^+(t) z^-(t)} dt$ , on utilise donc pour  $z$  la forme  $z = \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + o(\varepsilon)$  (on a bien  $o(\varepsilon)$  car  $\Phi_2$  est bornée), qui donne

$$\frac{1}{z^+(t) z^-(t)} = \frac{1}{\Phi_0^2} - 2\varepsilon \frac{\Phi_1}{\Phi_0^3} + o(\varepsilon),$$

donc

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \int_0^\lambda 4t(1+t) dt - 6\varepsilon \int_0^\lambda \frac{t}{1+t} (2+t) dt \\ \mathcal{I}_1 &= \frac{4}{3} \lambda^3 + 2\lambda^2 - \varepsilon \left( 3(1+\lambda)^2 - 3 - 6 \ln(1+\lambda) \right). \end{aligned} \quad (R\mathcal{I}_1)$$

Pour  $\mathcal{I}_2 = \int_\lambda^{x_0} \frac{t}{(1+t)^5 z^+(t) z^-(t)} dt$ , on se place au voisinage de  $t = -1$ , et on change de variable :  $t = -1 + X\sqrt{\varepsilon}$ ,  $z = \varepsilon^{-3/2}Y$ .

$$\mathcal{I}_2 = \sqrt{\varepsilon} \int_{\frac{\lambda+1}{\sqrt{\varepsilon}}}^{\frac{x_0+1}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{-1 + \sqrt{\varepsilon}X}{\sqrt{\varepsilon}^5 X^5 \varepsilon^{-3} Y^- Y^+} dX = \varepsilon \int_\ell^{X_\ell} \frac{-1 + \sqrt{\varepsilon}X}{X^5 Y^-(X) Y^+(X)} dX,$$

où on pose bien sûr  $\ell = \frac{\lambda+1}{\sqrt{\varepsilon}}$ . Le calcul ressemble à celui effectué plus haut dans le cas de van der Pol ; on commence par développer les fonctions dans l'intégrale suivant  $\varepsilon$ , avant d'estimer chacun des termes obtenus, en vérifiant que le dernier terme, et les suivants, sont bien négligeables par rapport aux précédents.

Comme  $Y(X) \sim \frac{1}{2X^3}$ , l'intégrale converge, y compris pour  $x_0 = -1$ , et

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_2 &= \varepsilon \int_{\ell}^{X_l} \frac{-1 + \sqrt{\varepsilon}X}{X^5 Y^-(X) Y^+(X)} dX \\
&= \varepsilon \int_{\ell}^{X_l} \frac{-1 + \sqrt{\varepsilon}X}{X^5 Y_0^-(X) Y_0^+(X) \left(1 + \sqrt{\varepsilon} \frac{Y_1^+}{Y_0^+} + \sqrt{\varepsilon} \frac{Y_1^-}{Y_0^-} + \varepsilon \frac{Y_2^+}{Y_0^+} + \varepsilon \frac{Y_2^-}{Y_0^-} + o(\varepsilon)\right)} dX \\
&= \varepsilon \int_{\ell}^{X_l} \frac{-1 + \sqrt{\varepsilon}X}{X^5 Y_0^-(X) Y_0^+(X)} dX - \varepsilon^{3/2} \int_{\ell}^{X_l} \frac{-1 + \sqrt{\varepsilon}X}{X^5 Y_0^-(X) Y_0^+(X)} \left(\frac{Y_1^+}{Y_0^+} + \frac{Y_1^-}{Y_0^-}\right) dX \\
&\quad - \varepsilon^2 \int_{\ell}^{X_l} \frac{-1 + \sqrt{\varepsilon}X}{X^5 Y_0^-(X) Y_0^+(X)} \left(\frac{Y_2^+}{Y_0^+} + \frac{Y_2^-}{Y_0^-} - \left(\frac{Y_1^+}{Y_0^+} + \frac{Y_1^-}{Y_0^-}\right)^2\right) dX + o(\varepsilon) \\
&= \underbrace{\int_{\ell}^{X_l} \frac{-\varepsilon}{X^5 Y_0^+ Y_0^-} dX}_{(A)} + \underbrace{\int_{\ell}^{X_l} \frac{\varepsilon^{3/2}}{X^4 Y_0^2} dX}_{(B)} + \underbrace{2\varepsilon^{3/2} \int_{\ell}^{X_l} \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}X}{X^5 Y_0^2} \frac{Y_1}{Y_0} dX}_{(C)} \\
&\quad + \underbrace{2\varepsilon^2 \int_{\ell}^{X_l} \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}X}{X^5 Y_0^2} \left(\frac{Y_2}{Y_0} - 2\frac{Y_1^2}{Y_0^2}\right) dX}_{(D)} + o(\varepsilon)
\end{aligned}$$

On s'occupe de chacun des termes de la somme

$$\begin{aligned}
D &\sim 2\varepsilon^2 \int_{\ell}^{X_l} \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}X}{X^5 Y_0^2} \left(\frac{3}{2X^2} + \frac{9}{8X^2}\right) dX \sim 2\varepsilon^2 \int_{\ell}^{X_l} (1 - \sqrt{\varepsilon}X) \frac{6 + 9/2}{X} dX \\
&= o(\varepsilon) \quad \left(\text{Rappel : } \ell = \frac{\lambda + 1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \\
C &\sim 2\varepsilon^{3/2} \int_{\ell}^{X_l} \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}X}{X^5 Y_0^2} \frac{Y_1}{Y_0} dX \sim 2\varepsilon^{3/2} \int_{\ell}^{X_l} (1 - \sqrt{\varepsilon}X) 4X \frac{3}{4X} dX \\
&\sim \varepsilon \left(-6(\lambda + 1) + 3(\lambda + 1)^2\right) \\
B &\sim \varepsilon^{3/2} \int_{\ell} \frac{dX}{X^4 \frac{1}{4X^6} \left(1 + \frac{3}{2X^2} + o\left(\frac{1}{X^3}\right)\right)} \\
&\sim \varepsilon^{3/2} \int_{\ell} (4X^2 - 6 + o(1/X)) dX \sim -\varepsilon^{3/2} \left(\frac{4}{3}\ell^3 - 6\ell\right) \\
&\sim -\frac{4}{3}(\lambda + 1)^3 + 6\varepsilon(\lambda + 1)
\end{aligned}$$

Pour A, il faut être plus précis et distinguer  $Y_0^+$  de  $Y_0^-$  ; on repasse donc par

l'équation différentielle (4.2),

$$(Y_0^+ - Y_0^-)' = -\frac{2}{X}(Y_0^+ - Y_0^-) + \frac{1}{X^5} \frac{-Y_0^+ + Y_0^-}{Y_0^- Y_0^+}$$

qui donne, en intégrant l'équation par la méthode de variation de la constante, pour tous  $\xi, \xi_0$  positifs :

$$(Y_0^+ - Y_0^-)(\xi) = (Y_0^+ - Y_0^-)(\xi_0) \exp \left( -2 \ln \frac{\xi}{\xi_0} - \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{1}{t^5 Y_0^-(t) Y_0^+(t)} dt \right)$$

$$\int_{\ell}^{X_l} \frac{-1}{t^5 Y_0^- Y_0^+} dt = \ln \frac{(Y_0^+ - Y_0^-)(X_l)}{(Y_0^+ - Y_0^-)(\ell)} + 2 \ln \frac{X_l}{\ell}.$$

D'après le résultat (19) obtenu plus haut,

$$\begin{aligned} A &\sim \varepsilon \left( \ln(Y_0^+ - Y_0^-)(X_l) - \ln(\mathcal{C} \ell^4 e^{-2\ell^2}) + 2 \ln \frac{X_l}{\ell} \right) \\ &\sim \varepsilon \left( \ln(Y_0^+ - Y_0^-)(X_l) - \ln \mathcal{C} - 4 \ln(\lambda + 1) + 2 \frac{(\lambda + 1)^2}{\varepsilon} + 2 \ln \varepsilon \right. \\ &\quad \left. + 2 \ln(x_0 + 1) - 2 \ln(\lambda + 1) \right). \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 \sim A + B + C + D &\sim -\frac{4}{3} \lambda^3 - 2 \lambda^2 + \frac{2}{3} + \varepsilon \left( \ln(Y_0^+ - Y_0^-)(X_l) + 2 \ln(x_0 + 1) \right. \\ &\quad \left. - 6 \ln(\lambda + 1) + 2 \ln \varepsilon - \ln \mathcal{C} + 3(\lambda + 1)^2 \right), \quad (R\mathcal{I}_2) \end{aligned}$$

puis en reprenant le résultat ( $R\mathcal{I}_1$ )

$$\exp \left( \frac{\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2}{\varepsilon} \right) \sim \exp \left( \frac{2}{3\varepsilon} \right) (Y_0^+ - Y_0^-)(X_l) (x_0 + 1)^2 \frac{\varepsilon^2}{\mathcal{C}} e^3,$$

donc avec (4.7) et (4.6), l'équation (4.5) devient

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-3/2} (Y_0^+ - Y_0^-)(X_l) &\sim b \frac{\sqrt{2\pi\varepsilon} e^3 (Y_0^+ - Y_0^-)(X_l) (x_0 + 1)^2 \varepsilon^2 e^{2/3\varepsilon}}{2\mathcal{C}\varepsilon(x_0 + 1)^2} \\ \varepsilon^{-3/2} &\sim b \frac{e^3 \sqrt{2\pi}}{2\mathcal{C}} \varepsilon^{3/2} e^{\frac{2}{3\varepsilon}} \\ b &\sim \frac{2\mathcal{C}}{\sqrt{2\pi} e^3} \frac{\exp(-\frac{2}{3\varepsilon})}{\varepsilon^3}. \end{aligned}$$

Finalement, on arrive au résultat du

**Théorème 20**

$$(a^+ - a^-)(\varepsilon) \sim 64ie^{-3} \exp\left(-\frac{2}{3\varepsilon}\right) \varepsilon^{-3}$$

### 4.3 Conséquence pour le développement en série de $a(\varepsilon)$

**Corollaire 21** *Les coefficients  $a_n$  du développement asymptotique de  $a^+$  et  $a^-$  ont une croissance Gevrey, et vérifient, quand  $n \rightarrow \infty$ ,*

$$a_n \sim 54n^2 \left(\frac{3}{2}\right)^n n!$$

Étudions d'abord ce qui se passe pour la fonction  $a^+(\varepsilon)$  quand on fait varier l'argument  $\theta$  de  $\varepsilon$ . Il est clair que  $a^+(\varepsilon)$  et  $v^+(x, \varepsilon)$  dépendent holomorphiquement de  $\varepsilon$  dans des secteurs centrés en 0 (mais pas en 0 lui-même). Regardons en particulier ce qui se passe quand on fait varier  $\theta$  entre 0 à  $-2\pi$ . En étudiant le relief correspondant à  $\theta$ , on peut déduire le domaine d'existence de la solution  $v^+$  correspondante (qui varie continûment avec  $\theta$  lui aussi); cette évolution du domaine est représenté figure 12. On remarque tout de suite que pour  $\varepsilon$  réel, le domaine de  $z^+$  pour  $\varepsilon e^{-2i\pi}$  correspond au domaine de  $z^-$  pour la valeur  $\varepsilon$ . Par unicité des solutions, on en déduit que  $a^+(\varepsilon e^{-2i\pi}) = a^-(\varepsilon)$ . C'est de cette propriété que l'on se servira ci-dessous.

On peut faire exactement les mêmes déductions que pour l'équation de Van der Pol, les deux solutions  $y^+(x, \varepsilon)$  et  $y^-(x, \varepsilon)$  étant reliées de la même manière. On intègre à nouveau sur un chemin autour de  $\varepsilon = 0$  (celui de la figure 6), pour trouver que

$$a_n \sim \frac{1}{2i\pi} \int_0^{\varepsilon_0} b(\varepsilon) \varepsilon^{-n-1} d\varepsilon.$$

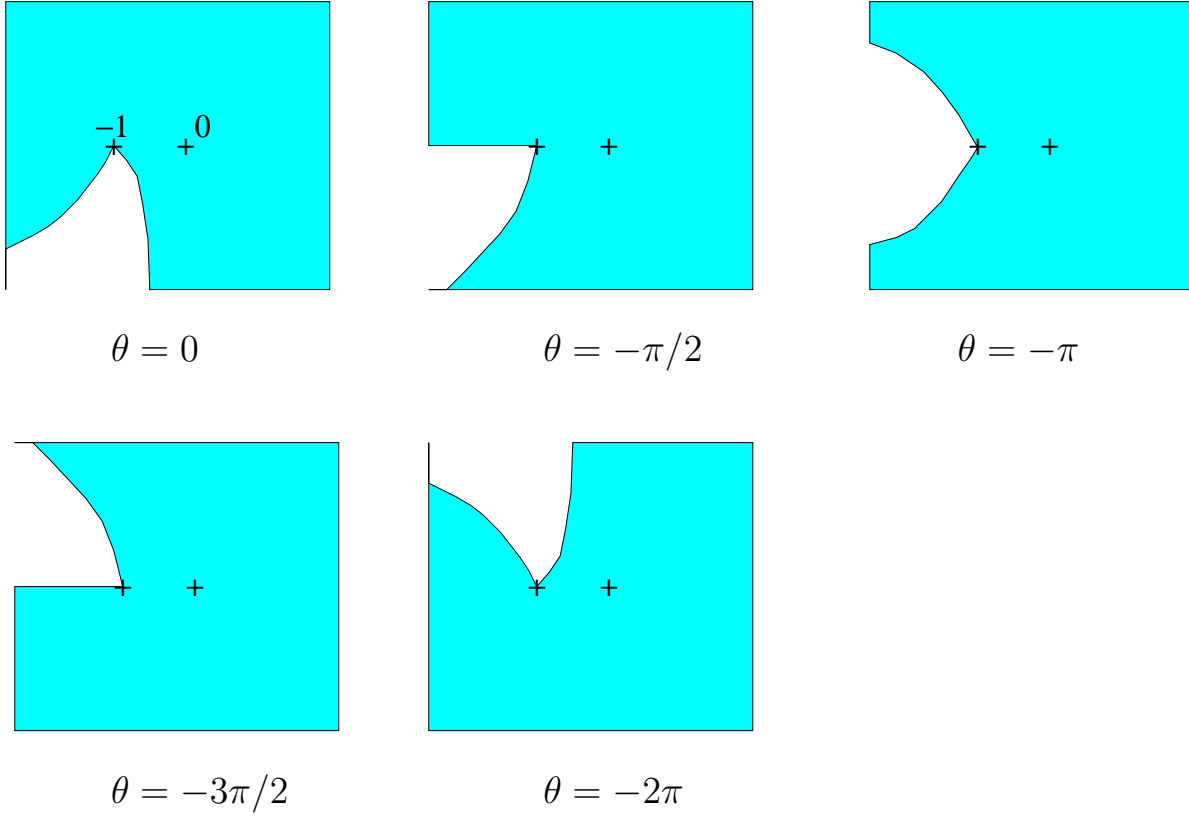
En utilisant le théorème 20,

$$\begin{aligned} & \sim \frac{1}{2i\pi} \int_0^{\varepsilon_0} 64ie^{-3} \exp\left(-\frac{2}{3\varepsilon}\right) \varepsilon^{-3} \varepsilon^{-n-1} d\varepsilon \\ & \sim \frac{32e^{-3}}{\pi} \int_0^{\varepsilon_0} \exp\left(-\frac{2}{3\varepsilon}\right) \varepsilon^{-n-4} d\varepsilon. \end{aligned}$$

Puis on pose  $t = 2/3\varepsilon$  et on transforme l'intégrale en une autre, équivalente :

$$\begin{aligned} a_n & \sim \frac{32e^{-3}}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n+3} e^{-t} t^{n+2} dt \\ a_n & \sim \frac{32e^{-3}}{\pi} \left(\frac{3}{2}\right)^{n+3} (n+2)! \end{aligned}$$

FIG. 12: Domaine d'existence de  $z^+$  pour différentes valeurs de  $\theta = \arg(\varepsilon)$ .



Soit, sous une forme plus normale,

$$a_n \sim \frac{108e^{-3}}{\pi} n^2 \left(\frac{3}{2}\right)^n n!$$

# Bibliographie

- [1] Éric Benoît, Jean-Louis Callot, Francine Diener, and Marc Diener. Chasse au canard. *Collectanea Mathematica*, 31(1–3) :37–119, 1981.
- [2] Éric Benoît, Augustin Fruchard, Reinhard Schäfke, and Guy Wallet. Solutions surstables des équations différentielles complexes lentes rapides à point tournant. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, 7(4) :627–658, 1998.
- [3] Jean-Louis Callot. Champs lents-rapides complexes à une dimension lente. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 4<sup>e</sup> Série, t. 26 :149–173, 1993.
- [4] M. Canalis-Durand, J. P. Ramis, R. Schäfke, and Y. Sibuya. Gevrey solutions of singularly perturbed differential equations. *J. Reine Angew. Math.*, 518 :95–129, 2000.
- [5] Mireille Canalis-Durand. Caractère Gevrey du développement formel des solutions canard de l'équation de van der Pol. *C. R. Acad. Sciences Paris Sér. I Math.*, 311(1) :27–30, 1990.
- [6] S. J. Chapman, J. R. King, and K. L. Adams. Exponential asymptotics and Stokes lines in nonlinear ordinary differential equations. *Proc. R. Soc. Lond.*, 454 :2733–2755, 1998.
- [7] Augustin Fruchard and Reinhard Schäfke. Exceptional complex solutions of the forced Van der Pol equation. *Funkcialaj Ekvacioj*, 42(2) :201–223, 1999.
- [8] Augustin Fruchard and Reinhard Schäfke. Surstabilité et résonance. *Prépublications de l'I.R.M.A.*, 1999.
- [9] M. D. Kruskal and H. Segur. Asymptotics beyond all orders in a model of crystal growth. *Stud. Appl. Math.*, 85 :129–181, 1991.
- [10] A. Liénard. Étude des oscillations entretenues. *Revue générale d'électricité*, 22(23) :901–954, 1928.
- [11] F.W.J. Olver. *Asymptotics and special functions*. New York, Academic Press, 1974.
- [12] Yasutaka Sibuya. Sur la réduction analytique d'un système d'équations différentielles ordinaires linéaires contenant un paramètre. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 7(1) :527–540, 1958.
- [13] van der Pol. Relaxation oscillations. *Philos. Mag.*, (2–7) :978–992, 1926.



- [14] Wolfgang Wasow. *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*. Dover Publications, New York, 1965.
- [15] Wolfgang Wasow. *Linear Turning Point Theory*. Springer, New York, 1985.